Основы финансовых вычислений

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. РАСЧЕТЫ ПО ПРОСТЫМ ПРОЦЕНТАМ

1.1 Декурсивный метод начисления простых процентов

Наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S = P + I, \tag{1.1}$$

где S – наращенная сумма или сумма задолженности, подлежащая погашению по окончании кредитного/депозитного договора, д.ед.;

P – первоначальная сумма капитала или размер предоставленного кредита/депозита, д.ед.;

I –сумма процентов, начисленных за весь срок операции, д.ед.

Сумма начисленных процентов вычисляется по формуле

$$I= P*i*n, \tag{1.2}$$

где n - срок операции или период действия кредитного договора в годах;

i – простая процентная ставка для конверсионного периода, равного одному году, %.

Формула наращения по простым процентам

$$S = P + P*i*n = P*(1+i*n). \tag{1.3}$$

В случае, если n не равно целому количеству лет применяют формулу

$$S = P*(1+i*t/k), \tag{1.4}$$

где t – срок финансовой операции;

k – временная база (12 мес., 4 квартала, 360 /365 дней).

$$S = P*(1+\frac{i*t}{k}),$$

$$S = 1000*(1+\frac{3}{12}*0{,}1),$$

$$S = 1000*(1+\frac{1}{4}*0{,}1),$$

$$S = 1000*(1+\frac{90}{360}*0{,}1).$$

В практике при осуществлении расчетов используют несколько вариантов определения срока операции, обобщенно представленные в таблице.

Таблица 1 - Варианты определения срока финансовой операции

Вариант начисления %	Порядок расчета срока операции	Временная база,k	Примечание
Точные % с точным числом дней в течение финансовой операции	Фактическое число дней финансовой. операции, определенное по календарю	366 365	Английская практика расчетов
Обыкновенные % с точным числом дней в течение финансовой операции	Фактическое число дней финансовой. операции, определенное по календарю	360	Французская практика расчетов
Обыкновенные % с приближенным числом дней в течение финансовой операции	Расчет числа дней операции производится исходя из предположения, что в каждом месяце 30 дней	360	Немецкая практика расчетов

При изменении процентной ставки по периодам наращенная сумма определяется по формуле

$$S=P*(1+n_1i_1+n_2i_2+\ldots+n_ki_k), \tag{1.5}$$

где $n_1, n_2, \ldots n_k$ – расчетные периоды, в которых начисление процентов производится соответственно по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Дисконтирование с использованием простой ставки вычисляется по формуле

$$P= \frac{S}{1 + n*i}. \tag{1.6}$$

1.2 Антисипативный метод начисления простых процентов

Наращение по простой учетной ставке производится по формуле

$$S = \frac{P}{1 - n*d}, \tag{1.7}$$

где S – наращенная сумма, д.ед.;
P –первоначальная сумма, д.ед.;
n – срок операции в годах;
d – простая учетная ставка, %.

Дисконтирование по простой учетной ставке вычисляется по формуле

$$P = S*(1 - n*d). \tag{1.8}$$

1.3 Начисление процентов и инфляция

Наращенная сумма с учетом инфляции рассчитывается по формуле

$$S = P(1+i)*(1+h) = P(1+i)Y_k, \tag{1.9}$$

где h – темп инфляции;

Y_k – индекс инфляции за k-периодов ($Y_k = (1+h_1)*(1+h_2)*\ldots*(1+h_k)$).

Вопросы для изучения:

- сущность процентных платежей;
- виды процентных ставок;
- дисконтирование по простым процентам;
- наращенная сумма по простым процентам;
- применение простых процентов в потребительском кредите;
- изменяющаяся простая ставка процентов;
- учет инфляции в финансовых операциях;
- стоимость денег и время;
- сущность дисконтирования;
- виды дисконтирования;
- учет векселей;
- наращение по учетной ставке.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Фирме выделен банковский кредит на срок с 3 января по 12 марта под простые проценты с процентной ставкой 12 % годовых. Сумма кредита – 80 000 д.ед. Определить по трем методам коэффициент наращения и наращенную сумму.

Решение. Коэффициент наращения рассчитывается по формуле

$$K = \frac{S}{P} = 1 + i*n = 1 + i\frac{t}{k}. \tag{1.10}$$

Расчет коэффициентов наращения по трем вариантам определения срока финансовой операции

t1= 68; K1 = 1+ 68/365*0,12 = 1,02236,

t2= 68; K2 = 1+ 68/360*0,12 = 1,02269,

t3= 69; K3 = 1+ 69/360*0,12 = 1,023.

Расчет наращенных сумм
S1 = 81788,8,
S2 = 81815,2,
S3 = 81840.

Очевидно, что фирме предпочтительнее расчет коэффициента наращения по первому методу. Особенно заметны финансовые различия при k = 360 .

Пример 1.2. Фирма взяла в коммерческом банке кредит на сумму 600 000 д.ед. сроком на 4 года. Согласно договору, за первый год процентная ставка составляла 18 % и с учетом инфляции каждый последующий год повышалась на 2 пункта. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму и доход банка.
Решение. Расчет коэффициента наращения в случае использования изменяющейся процентной ставки

$$k_H = 1 + \sum_{m=1}^{p} n_m i_m. \qquad (1.11)$$

К = 1 + 0,18* 1 +0,2 * 1 + 0.22 * 1 +0,24 =1,84,
S=K* P=600 000*1,84 =1 104 000,
D= S-P =1 104 000 - 600 000 =504 000.

Пример 1.3. Клиент оформляет вклад на срочный депозит сроком на 1 месяц в коммерческом банке. Процентная ставка банка 16 % годовых. Годовой уровень инфляции 4 %. Определите реальную годовую процентную ставку прибыли, по которой оформлен вклад.
Решение. Годовая процентная ставка с учетом инфляции (r) рассчитывается по формуле

$$r = i + h + \frac{t}{k} * ih. \qquad (1.12)$$

Отсюда реальная ставка доходности составит

$$i = \frac{r-h}{1+\frac{t}{k}h}. \qquad (1.13)$$

i = (0,16 – 0,04)/(1 + 1/12*0,04) = 0,1196.

Реальная ставка доходности по срочному депозиту составит 11,96 % годовых.

Пример 1.4. Клиент получил кредит сроком на 3 месяца в 60000 д.ед. Сумма возврата кредита – 65000 д.ед. Определите процентную ставку банка.

Решение. Наращенная сумма $S = P*(1+i*\frac{t}{k})$, поэтому $i = \frac{S-P}{P*t}*k$

$$i = \frac{65000-60000}{60000*3}*12 = 0{,}33$$

Процентная ставка банка составит 33 %.

ТЕМА 2. РАСЧЕТЫ ПО СЛОЖНЫМ ПРОЦЕНТАМ

2.1. Декурсивный метод начисления сложных процентов

Наращение по сложным процентам вычисляется по формуле

$$S_n = P(1+i)^n \ , \qquad (2.1)$$

где S_n – наращенная сумма на конец n - го года, д.ед.;
P – первоначальная сумма денежных средств, д.ед.;
i - ставка сложных процентов, %;
n – срок операции наращения в годах;
$(1+i)^n$ - множитель наращения сложных процентов.

При изменении процентной ставки из периода в период наращенная сумма по сложным процентам определяется по формуле

$$S = P*(1+i_1)^{n_1}*(1+i_2)^{n_2}*.....*(1+i_k)^{n_k} \ , \qquad (2.2)$$

где $i_1, i_2, \ldots i_k \ldots i_t$ - процентные ставки установленные для соответствующих интервалов времени n, %.

В случае, если проценты начисляются чаще одного раза в год, то применяют формулу

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn}, \qquad (2.3)$$

где j – годовая процентная ставка (номинальная), %;
m - число периодов капитализации процентов в течение года.

Определение первоначальной или дисконтированной суммы некоторой суммы S выполняется по формуле

$$P = S*(1+i)^{-n} \quad . \tag{2.4}$$

2.2 Антисипативный метод начисления сложных процентов

Наращение по сложной учетной ставке производится по формуле

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}\ , \tag{2.5}$$

где S – наращенная сумма, д.ед.;
P –первоначальная сумма, д.ед.;
n – срок операции в годах;
d –сложная учетная ставка, %.

Если капитализация процентов производится чаще, чем один раз в год, наращение по сложной учетной ставке производится по формуле

$$S = \frac{P}{(1-f/m)^{m*n}}\ , \tag{2.6}$$

где f – годовая номинальная учетная ставка, %;
m – число периодов капитализации процентов в течение года.

2.3 Начисление процентов и инфляция

Наращенная сумма по сложным процентам с учетом инфляции рассчитывается по формуле

$$S = \frac{P(1+i)^n}{(1+h)^n}\ , \tag{2.7}$$

где h – темп инфляции.

Формула корректировки первоначальной суммы капитала на уровень инфляции

$$S=P*Y*(1+i)^n, \tag{2.8}$$

где i – процентная ставка, отражающая реальную доходность финансовой операции, %;
Y – индекс инфляции.

Формула расчета процентной ставки, скорректированной на уровень инфляции (формула Фишера)

$$r = i+h+i*h, \tag{2.9}$$

где r – процентная ставка, скорректированная на уровень инфляции, %;

i – процентная ставка, отражающая реальную доходность финансовой операции, %;

h – темп инфляции.

2.4 Наращение на основе непрерывных процентных ставок

Формула наращения по непрерывной процентной ставке

$$S=Pe^{\delta n}, \tag{2.10}$$

где e – основание натурального логарифма, e=2,718;

δ - процентная ставка при начислении непрерывных процентов или сила роста, %;

$e^{\delta n}$ - множителем наращения при непрерывной капитализации процентов.

Формула наращения с переменной силой роста

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t n_t}. \tag{2.11}$$

Формула наращения для случая, если сила роста изменяется дискретно

$$S = Pe^{\delta_1 n_1 + \delta_2 n_2 + \ldots + \delta_k n_k}, \tag{2.12}$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_к$ сила роста в соответствующих интервалах $n_1, n_2, \ldots n_к$, %.

Формула наращения для случая, если сила роста изменяется непрерывно и может быть описана арифметической прогрессией

$$S = Pe^{\delta_0 + \frac{an^2}{2}}, \tag{2.13}$$

где δ_0- начальная величина силы роста, %;
а - годовой прирост или снижение силы роста.

Формула наращения для случая, если сила роста изменяется непрерывно и может быть описана геометрической прогрессией:

$$S = Pe^{\frac{S_0}{}(a^n - 1)}, \qquad (2.14)$$

где а – знаменатель геометрической прогрессии.

Дисконтирование на основе непрерывных % ставок производится по формуле

$$P=Se^{-\delta n}\ . \qquad (2.15)$$

Вопросы для изучения:

- начисление сложных процентов;
- непрерывное начисление процентов;
- дисконтирование по сложным процентным ставкам;
- определение параметров наращения по операциям по сложным процентам;
- учет инфляции в финансовых операциях.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Клиент внес в банк 1000 тыс. руб.на 2 года. Процентная ставка банка - 24 %. Налог на проценты - 15 %. Требуется определить сумму налога и наращенную сумму в случае: а) простых процентов, б) сложных процентов, в) сложных процентов при ежемесячном начислении.

Решение.

а) простые проценты

Сумма налога рассчитывается по формуле

$$H = Pinr. \qquad (2.16)$$

H1= 1000*2*0,24*0,15=72 тыс. руб,
S1= 1000[1+2*0,24*(1-0,15)]= 1408 тыс. руб.

б) сложные проценты

Сумма налога рассчитывается по формуле

$$H = P*[(1+i_c)^n - 1]*r. \quad (2.17)$$

$H2$ = 1000* [(1 + 0,24)^2 - 1] * 0,15 = 80,64 тыс. руб,
$S2$ = 1000 *[(1 + 0.24)^2 *(1 - 0,15) + 0,15] = 1457 тыс. руб.

в) сложные проценты при ежемесячном начислении
Сумма налога рассчитывается по формуле

$$H = P*[(1+ j/m)^{mn} - 1]*r. \quad (2.18)$$

Н3= 1000* [(1 +0,24/12)^{12*2}-1]*0,15=91,27 тыс. руб,
S3= 1000*[(1 +0,24/12)^{12*12}(1 -0,15)+0,15]= 1517,2 тыс. руб.

Пример 2.2. Банк принимает валютные вклады на депозит с номинальной процентной ставкой 12 % годовых. Начисление процентов – ежемесячное. Определите доход клиента при вкладе 2500 тыс. руб.и сроке вклада 6 месяцев.
Решение.
Доход клиента $I = S - P = P*(1+\frac{j}{m})^{m*n} - P$

$$I = 2500*(1+\frac{0.12}{12})^{12*0.5} - 2500 = 153{,}8$$

Доход клиента составит 153,8 тыс. руб.

Пример 2.3. Определите период времени, необходимый для удвоения капитала по сложным процентам при процентной ставке 12 % годовых, начисление процентов ежемесячное.
Решение. При удвоении капитала $S = 2*P = P(1+\frac{j}{m})^{m*n}$, отсюда $n = \frac{\ln 2}{m*\ln(1+\frac{j}{m})}$

$$n = \frac{\ln 2}{12*\ln(1+\frac{0.12}{12})} = 5{,}8$$

Для удвоения капитала необходимо 5,8 года.

Пример 2.4. Вексель выдан на 10000 д.ед. с уплатой 15 октября. Владелец векселя погасил его в банке 15 августа того же года по сложной учетной ставке 10 % годовых. Сколько получил векселедержатель? Сколько получит векселедержатель, если срок уплаты по векселю 15 октября следующего года?

Решение. Число дней между 15 августа и 15 октября равно 60 дней. По формуле определения дисконтированной суммы по учетной ставке $P = S*(1-d)^n$,находим

$$P = 10000*(1-0.12)^{\frac{60}{360}} = 9825{,}93 \text{ д.ед.}$$

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно 360+60=420 дней.

$$P = 10000*(1-0.12)^{\frac{420}{360}} = 8843{,}34 \text{ д.ед.}$$

ТЕМА 3. ЭКВИВАЛЕТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК И ПЛАТЕЖЕЙ

Две процентные ставки называют эквивалентными, если применение их к одинаковым суммам в течении одинаковых промежутков времени дает одинаковые наращенные суммы. Для определения эквивалентных ставок необходимо приравнять соответствующие коэффициенты наращения или дисконтирования.

Ставка сложных процентов, эквивалентная ставке простых процентов рассчитывается по формуле

$$i_c = \sqrt[n]{1 + n i_n} - 1, \qquad (3.1)$$

где i_n – простая процентная ставка, %;

i_c – сложная процентная ставка, %.

Расчет эффективной процентной ставки производится по формуле

$$i_{эф} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1 \qquad (3.2)$$

где $i_{эф}$ - эффективная процентная ставка, %;

m - число периодов капитализации процентов в течение периода.

Нахождение суммы объединенного платежа при известном сроке и начислении простых процентов вычисляется по формуле

$$S_0 = \sum S_j (1 + t_j * i) + \sum S_k (1 + t_k * i)^{-1}, \qquad (3.3)$$

где S_j – суммы объединенных платежей, сроки выплат которых меньше нового срока, ($nj < n_0$), д.ед.;

t_j – разница между сроком выплаты объединенного платежа и сроком выплаты каждого объединенного платежа ($t_j = n_0 - n_j$), дни;

S_k – суммы объединенных платежей со сроками, превышающими срок объединенного платежа ($n_k > n_0$), д.ед.;

t_k – период времени между сроком погашения по первоначальным условиям контракта и сроком погашения по новым условиям контракта ($t_k=n_k-n_0$), дни.

Нахождение суммы объединенного платежа при известном сроке и начислении сложных процентов вычисляется по формуле

$$S_0 = \sum S_j (1+i)^{tj} + \sum S_k (1+i)^{-t_k}. \quad (3.4)$$

Определение срока объединенного платежа при известном значении консолидированной суммы и начислении простых процентов производится по формуле

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right), \qquad (3.5)$$

где n_0 – срок объединенного платежа, определенный по известной сумме объединенного платежа, годы;

i – простая % ставка, %;

S_0 – сумма объединенного платежа, д.ед.;

P_0 – современная ценность совокупности объединенных платежей, д.ед.

Определение срока объединенного платежа при известном значении консолидированной суммы и начислении сложных процентов производится по формуле

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{P_0}\right)}{\ln(1+i)}, \qquad (3.6)$$

где i – сложная процентная ставка, %.

Уравнение эквивалентности при использовании сложных ставок можно представить в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{l} R_k V^{t_k} = \sum_{q=1}^{m} S_q V^{p_q}, \qquad (3.7)$$

где R_k - размеры платежей по первоначальному варианту договора, $R_k = R_1, R_2, \ldots R_l$, д.ед.;

$t_к$ - сроки платежей по первоначальному варианту договора, $t_к = t_1, t_2, \ldots t_l$, дни;

S_q- размеры платежей по новому варианту договора, $S_q=S_1, S_2, \ldots S_m$, д.ед.;

P_q - сроки платежей по новому варианту договора, $P_q = P_1, P_2, \ldots P_m$, дни;

V - элемент множителя наращения или дисконтирования.

Вопросы для изучения:

- понятие современной ценности денег;
- эквивалентность простых и сложных ставок;
- понятие номинальной и эффективной ставки;
- понятие эквивалентности процентных ставок;
- изменение условий контрактов;
- консолидация платежей.

Пример 3.1. Получен кредит сроком на 2 года под 16 % годовых. Проценты простые (сложные), и комиссионные составляют q = 1 % от суммы кредита. Требуется определить эффективную процентную ставку доходности: а) как ставку простых процентов, б) как ставку сложных процентов.

а) наращенная сумма кредита для кредитора

$$S = P*(1+n*i). \tag{3.8}$$

Клиент получит сумму S1 = P(1 - q), и наращенная сумма кредита для клиента будет

$$S=P(1-q)(1+ n*i_{эф.пр}). \tag{3.9}$$

Отсюда

$$i_{эф.пр.} = \frac{1+i*n}{(1-q)*n} - \frac{1}{n} = \frac{1+2*0.36}{(1-0.01)*2} - \frac{1}{2} = 0{,}3687.$$

б) если кредит получен под сложные проценты, то наращенная сумма кредита будет

$$S = P(1+i)^n = P(1-q)(1+i_{эф})^n, \tag{3.10}$$

$$i_{эф} = \frac{1+i}{(1-q)^{1/n}} - 1 = \frac{1+0{,}36}{(1-0{,}01)^{1/2}} - 1 = 0{,}3669.$$

Пример 3.2. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 000 д.ед., предоставляя кредит покупателям под 12 % сложных годовых. Г-н Петров приобрел коттедж, заплатив в момент покупки 20 000 д.ед., через год – 20 000 д.ед., еще через год – 20 000 д.ед. и остаток долга погасил через 2,5 года от момента покупки. Чему рамен последний платеж?

Решение. Все платежи приведем к моменту покупки и приравняем стоимости коттеджа

$80000= 20000 +20000*(1+0,12)^{-1} + 20000*(1+0,12)^{-2} + x*(1+0,12)^{-2,5}$

$x = 34779,99$

Последний платеж должен быть 34779,99 д.ед.

Пример 3.3.Покупатель должен выплатить поставщику через полгода после поставки 80 000 д.ед., еще через полгода – 50 000 д.ед. и еще через 8 месяцев – 70 000 д.ед. Покупатель хочет весь долг выплатить одним платежом, равным 200 000 д.ед. В какой момент он должен сделать этот платеж, если на долг начисляются 14 % сложных годовых ?

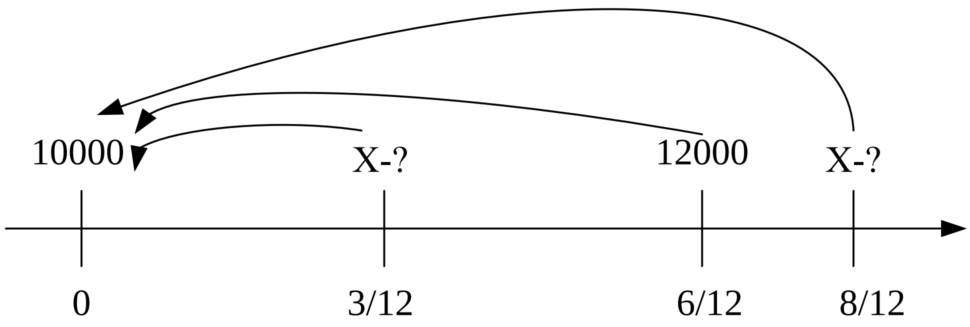
Решение. По формуле (3.6) находим значение n_0

$$n_0 = \frac{\ln\left(\dfrac{200000}{80000*(1+0,14)^{-0,5}+50000*(1+0,14)^{-1}+70000*(1+0,14)^{-\frac{5}{3}}}\right)}{\ln(1+0,14)} = 1,02.$$

Платеж в сумме 200 000 д.ед. надо сделать через 1 год и 8 дней.

Пример 3.4. Согласно контракту ЧП «Арго» обязано заплатить ЧП «Зенит» 10000 д.ед. сейчас и 12 000 через 6 месяцев, ЧП «Арго» желает изменить контракт, вернув долг двумя равными платежами, сделав первый платеж через 3 месяца и второй через 8 месяцев от сегодняшнего дня. Какой величины должен быть каждый из этих платежей, если деньги приносят кредитору проценты по ставке j_2=16 %.

Решение. Т.к. оба контракта должны быть равноценны для кредитора, то приведенные к любому (одному и тому же) моменту времени современные стоимости сумм по обоим контрактам должны быть равны. Приведение к одному и тому же моменту времени (был выбран момент заключения контракта) показан ниже.



Значение платежей находим из уравнения

$$10000+12000*(1+0{,}16/2)^{-(0{,}5*2)} = X*(1+0{,}16/2)^{-0{,}25} + X*(1+0{,}16/2)^{-(2/3)}.$$

x=11530.

ЧП «Арго» должно сделать по два платежа в сумме 11530 д.ед.

ТЕМА 4. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

4.1 Наращенная сумма финансовых рент

4.1.1 Ренты с начислением процентов в конце года

Пусть в течение n лет в банк в конце каждого года вносится по R тыс. руб. На взносы начисляются сложные проценты по ставке i % годовых. Таким образом, имеется рента член которой равен R, а срок n. Все члены ренты, кроме последнего, приносят проценты. На последний взнос проценты не начисляются. Члены ренты с начисленными к концу срока процентами образуют ряд

$$R,\ R(1+i)^1,\ R(1+i)^2,\ldots,R(1+i)^{n-1}.$$

Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)^1$, первым членом прогрессии R и числом членов прогрессии n.

Сумма членов геометрической прогрессии (S) определяется по формуле

$$S = b_1\frac{q^n-1}{q-1}, \qquad (4.1)$$

где b_1 - первый член геометрической прогрессии;

q - знаменатель прогрессии;

n - число членов прогрессии.

Наращенная к концу срока сумма ренты постнумерандо определяется путем подстановки в формулу (4.1) исходных данных, полученных по построенному ряду (см.выше). Таким образом, искомая величина наращенной к концу срока суммы (S) годовой ренты постнумерандо будет равна

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R * S_{n,i}, \qquad (4.2)$$

где R - элемент (член) годовой ренты, д.ед.;

i - годовая процентная ставка, %;

n - продолжительность (срок) ренты, лет;

$S_{n,i}$ - коэффициент наращения годовой ренты, определяемый по специальным таблицам.

Пусть рента выплачивается p раз в году равными суммами, процент начисляется один раз в конце года. Если годовая сумма платежей равна R, то каждый раз выплачивается R/p. Члены ренты с начисленными к концу срока процентами образуют ряд

$$\frac{R}{p}, \frac{R}{p}(1+i)^{1/p}, \frac{R}{p}(1+i)^{2/p}, \ldots, \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{np-1}{p}}.$$

Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)^{1/p}$, первым членом прогрессии R/p и числом членов прогрессии np.

Расчет наращенной суммы (S) p-срочной ренты производится по формуле

$$S = \frac{R}{p}\frac{\left((1+i)^{(1/p)}\right)^{np} - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{R}{p}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{R}{p}\frac{S_{n;i}}{S_{\frac{1}{p};i}}, \qquad (4.3)$$

где R/p - элемент (член) p-срочной ренты, д.ед.;

p - количество платежей за год;

$S_{n,i}$, $S_{1/p,i}$- соответственно коэффициент наращения годовой и p-срочной ренты, определяемые по таблицам.

Пусть рента выплачивается каждые r лет годовыми платежами R в течение срока n, процент начисляется один раз в конце года. Члены ренты с начисленными к концу срока процентами образуют ряд

$$R, R(1+i)^r, R(1+i)^{2r}, ..., R(1+i)^{n-r}.$$

Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)^r$, первым членом прогрессии R и числом членов прогрессии n/r.

Расчет наращенной суммы (S) финансовой ренты с периодом больше года (дискретная или r-срочная рента) проводится с использованием формулы

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^r - 1} = R\frac{S_{n,i}}{S_{r,i}}, \qquad (4.4)$$

где R - элемент (член) r-срочной ренты, д.ед.;

r - периодичность осуществления платежей, $r > 1$;

$S_{n,i}$, $S_{r,i}$ - соответственно коэффициенты наращения годовой и r-срочной ренты, определяемые по таблицам.

4.1.2 Ренты с начислением процентов m раз в год (по ставке j/m)

Расчет наращенной суммы (S) годовой финансовой ренты

$$S = R\frac{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m} - 1} = R\frac{S_{mn,{}^{j}\!/_{m}}}{S_{m,{}^{j}\!/_{m}}}, \qquad (4.5)$$

где j - номинальная годовая процентная ставка, %;

m - период капитализации процентов.

Расчет наращенной суммы (S) p-срочной ренты:

$$S = \frac{R}{p}\frac{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{{}^{m}\!/_{p}} - 1} = \frac{R}{p}\frac{S_{mn,{}^{j}\!/_{m}}}{S_{{}^{m}\!/_{p},{}^{j}\!/_{m}}}. \qquad (4.6)$$

На практике часто встречаются случаи, когда число выплат в году равно числу начисленных процентов, т.е. когда p=m. Для получения необходимой формулы воспользуемся формулой (4.2), в которой i заменяется на j/m, а вместо числа лет берется число периодов выплат ренты np, член ренты равен R/p. Так как p=m, то в итоге получим формулу наращенной суммы (S)

$$S = \frac{R}{m}\frac{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn}-1}{{j}/{m}} = R\frac{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn}-1}{j}. \qquad (4.7)$$

Расчет наращенной суммы (S) финансовой ренты с периодом больше года (r-срочная рента)

$$S = R\frac{\left(1+{j}/{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+{j}/{m}\right)^{m*r}-1} = R\frac{S_{mn,{j}/{m}}}{S_{mr,{j}/{m}}}. \qquad (4.8)$$

4.1.3 Ренты с непрерывным начислением процентов

Расчет наращенной суммы (S) годовой финансовой ренты производится по формуле

$$S = R\frac{e^{\delta * n}-1}{e^{\delta}-1}, \qquad (4.9)$$

где e - основание логарифма, e = 2,718;

δ - сила роста, %.

Расчет наращенной суммы (S) p-срочной ренты производится по формуле

$$S = \frac{R}{p}\frac{e^{\delta * n}-1}{e^{\delta / p}-1}. \qquad (4.10)$$

Расчет наращенной суммы финансовой ренты с периодом больше года производится с использованием формулы

$$S = R\frac{e^{\delta * n}-1}{e^{\delta^{*r}}-1}. \qquad (4.11)$$

4.2 Современная стоимость финансовых рент

4.2.1 Ренты с начислением процентов в конце года.

Пусть член годовой ренты равен R, срок ренты n. На взносы начисляются сложные проценты по ставке i % годовых. В этих условиях дисконтированная величина первого платежа равна $R(1+i)^{-1}$, второго - $R(1+i)^{-2}$, последнего - $R(1+i)^{-n}$. Таким образом, эти величины образуют следующий ряд

$$R(1+i)^{-1},\ R(1+i)^{-2}, \ldots,\ R(1+i)^{-n}.$$

Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)^{-1}$, первым членом прогрессии R и числом членов прогрессии n. Подставляя эти данные в формулу (4.1), находим современную стоимость (P) годовой финансовой ренты

$$P = R(1+i)^{-1}\frac{(1+i)^{-1*n}-1}{(1+i)^{-1}-1} = R\frac{1}{(1+i)}\frac{(1+i)^{-n}-1}{-i}(1+i) = R\frac{(1+i)^{-n}-1}{i} = R*a_{n,i}, \qquad (4.12)$$

где $a_{n,i}$ - коэффициент приведения годовой ренты, определяемый по таблицам.

Если платежи производятся не один, а p раз в году, то размер платежа равен R/p. Члены ренты образуют ряд

$$\frac{R}{p}(1+i)^{-1/p}, \frac{R}{p}(1+i)^{-2/p}, \ldots, \frac{R}{p}(1+i)^{-\frac{n}{p}}.$$

Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)^{-1/p}$, первым членом прогрессии $\frac{R}{p}(1+i)^{-1/p}$ и числом членов прогрессии np. Подставив данные в формулу (4.1) получаем сумму дисконтированных платежей или современную стоимость (P) p-срочной ренты

$$P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{a}_{\mathrm{n;i}}}{\mathrm{S}_{\frac{1}{\mathrm{p}};i}}. \qquad (4.13)$$

Пусть рента выплачивается каждые r лет годовыми платежами R в течение срока n, процент начисляется один раз в конце года. Дисконтированные члены ренты образуют ряд

$$R(1+i)^{-r}, R(1+i)^{-2r}, ..., R(1+i)^{-n}.$$

Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i)^{-r}$, первым членом прогрессии R и числом членов прогрессии n/r.

Современная стоимость (P) финансовой ренты с периодом больше года (r-срочная рента) определяется по формуле

$$P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{r}-1} = R\frac{a_{n,i}}{S_{r,i}}. \qquad (4.14)$$

4.2.2 Ренты с начислением процентов m раз в год

Расчет современной суммы годовой финансовой ренты производится по формуле

$$P = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1} = R\frac{a_{mn,{}^{j}\!/_{m}}}{S_{m,{}^{j}\!/_{m}}}. \qquad (4.15)$$

Расчет современной суммы p-срочной ренты производится по формуле

$$P = \frac{R}{p}\frac{\left[1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-nm}\right]}{\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]} = \frac{R}{p}\frac{a_{nm;\frac{j}{m}}}{s_{\frac{m}{p};\frac{j}{m}}}. \qquad (4.16)$$

Частный случай p-срочной ренты при p=m, т.е. число членов ренты равно числу начислений процентов. Величина члена ренты составляет R/m. Современная стоимость (P) в таком случае определяется по формуле

$$P=\frac{R}{m}\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{{}^{j}\!/_{m}}=R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{j}. \quad (4.17)$$

Расчет современной суммы (P) финансовой ренты с периодом больше года

$$P=R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m*r}-1}=R\frac{a_{mn,{}^{j}\!/_{m}}}{S_{mr,{}^{j}\!/_{m}}}. \quad (4.18)$$

4.2.3 Ренты с непрерывным начислением процентов

Расчет современной суммы (P) годовой финансовой ренты производится по формуле

$$P=R\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}. \quad (4.19)$$

Расчет современной суммы (P) p-срочной ренты производится по формуле

$$P=\frac{R}{p}\frac{1-e^{-\delta*n}}{e^{\delta/p}-1}. \quad (4.20)$$

Расчет современной суммы (P) финансовой ренты с периодом больше года

$$P=R\frac{1-e^{-\delta*n}}{e^{\delta*r}-1}. \quad (4.21)$$

4.2.4 Вечная рента

Расчет современной стоимости p–срочной ренты с начислением процентов в конце года по ставке сложных процентов, равной i.

$$P_{\infty} = \frac{R}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]}. \qquad (4.22)$$

4.3 Конверсия финансовых рент и анализ переменных денежных потоков

Расчет единовременного платежа при выкупе ренты производится по формуле

$$A=R*a_{n,i}*V^{t}\ , \qquad (4.23)$$

где A – размер единовременного платежа, д.ед.;
R – элемент ренты, д.ед.;
$a_{n;i}$ – множитель приведения;
n – срок реализации ренты в годах;
i – процентная ставка, используемая по согласованию сторон для расчета конверсионных параметров, %;
V – множитель наращения V = (1+i);
t – временной период, соответствующий периоду отсрочки выплаты единовременного платежа в годах.

При заданном сроке ренты, уровне процентной ставке определить размер регулярного платежа позволяет формула

$$R=P/\ a_{n,i}, \qquad (4.24)$$

где P - современная стоимость ренты, д.ед.;

При заданном размере платежа и современной стоимости определить значение коэффициента приведения возможно по следующей формуле

$$a_{n;i} = P/R. \qquad (4.25)$$

Современная величина консолидированной ренты определяется с использованием формулы

$$P = \sum_{q=1}^{k} P_q\ , \qquad (4.26)$$

где P – современная ценность консолидированных рент, д.ед.;

P_q – современная ценность q-ренты из совокупности объединенных рент, д.ед.;

k – количество объединенных рент.

Размер элемента консолидированной ренты при заданном сроке реализации ренты определяется по формуле

$$R = \frac{P}{a_{n,i}} = \frac{\sum_{q=1}^{n} P_q}{a_{n,i}} = \frac{\sum_{q=1}^{n} R_q a_{nq,iq}}{a_{n,i}}, \tag{4.27}$$

где R_q – элемент q-й объединяемой ренты, д.ед.;

$a_{nq,iq}$ – множитель приведения q-ренты;

iq – процентная ставка, используемая для приведения q-й ренты, %;

n – срок реализации консолидированной ренты в годах;

i–процентная ставка, используемая для конверсионного преобразования, %.

Элемент ренты в случае отсрочки, если сроки ренты остаются неизменными ($n_0=n_1$) рассчитывается по формуле

$$R_0 * a_{n,i} = R_1 * a_{n,i} * v^t, \tag{4.28}$$

$$R_1 = R_0 * v^t, \tag{4.29}$$

где R_0 – платеж первоначальной ренты, д.ед.;

R_1 – платеж отсроченной ренты, д.ед.;

t - период отсрочки ренты в годах;

v- дисконтный множитель, $v=(1+i)^{-1}$.

Элемент ренты в случае отсрочки, если сроки ренты изменяются ($n_0 \neq n_1$) рассчитывается по формуле

$$R_1 = R_0 * (a_{n_0,i} / a_{n_1,i}) * V^t, \tag{4.30}$$

где n_0 – срок первоначальной ренты в годах;

n_1 – срок отсроченной ренты в годах.

В случае замены годовой ренты с параметрами R_0, n_0 на p-срочную ренту с параметрами R_1/p, n_1, расчет элемента новой ренты производят по формуле

$$. \tag{4.31}$$

Современная и наращенная ценность финансовой ренты с постоянным абсолютным изменением элемента рассчитывается по формуле

$$P = (R + \frac{a}{i})a_{n,i} - \frac{nav^n}{i}, \tag{4.32}$$

$$S = (R + \frac{a}{i})S_{n,i} - \frac{na}{i} \tag{4.33}$$

где P – современная ценность переменной финансовой ренты, д.ед.;

S – наращенная сумма переменной финансовой ренты, д.ед.;

R – начальное значение ряда, характеризующее поток, д.ед.;

a – ежегодный абсолютный прирост выплат или поступлений.

Современная и наращенная ценность финансовой ренты с постоянным относительным изменением элемента рассчитывается по формуле

$$P = R * \frac{1 - \frac{(1+k)^n}{(1+i)^n}}{i-k}, \tag{4.34}$$

$$S = R * \frac{(1+k)^n - (1+i)^n}{k-i}, \tag{4.35}$$

где P – современная ценность переменной финансовой ренты, д.ед.;

S – наращенная сумма переменной финансовой ренты, д.ед.;

R – размер первого платежа переменной финансовой ренты, д.ед.;

q – темп роста платежей (q=1+k);

k – темп прироста платежей.

Вопросы для обсуждения:

- понятие денежного потока и финансовой ренты;
- классификация рент;
- наращенная сумма ренты;
- текущая стоимость ренты;
- вечная рента;
- определение параметров финансовых рент;

- конверсия платежей.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Клиент желает накопить за 16 лет 15 000 д.ед., делая равные вклады в банк каждые 4 года, который выплачивает проценты по ставке 16 % сложных годовых. Какую сумму должен вкладывать клиент?

Решение.
Задана r-срочная рента с начислением процентов один раз в год. Наращенная сумма ренты S=15000, срок ренты n=16, периодичность взносов r=4, процентная ставка i =0,16. Необходимо найти элемент (член) ренты, т.е. R-? Для решения воспользуемся формулой (4.4), из которой определим искомый элемент ренты

$$R = \frac{S * ((1+i)^{r} - 1)}{(1+i)^{n} - 1} = \frac{15000 * ((1+0,16)^{4} - 1)}{(1+0,16)^{16} - 1} = 1247,39 \text{ д.ед.}$$

Ответ: Клиент должен каждые 4 года вкладывать в банк 1247,39 д.ед., чтобы за 16 лет накопить 15 000 д.ед.

Пример 4.2. Какой срок необходим для накопления 120 000 д.ед. при условии, что ежемесячно в банк вносится 500 д.ед, на накопления начисляются проценты по ставке 25 % годовых.

Решение.
Имеем R/p=500, i=0,25, S=120 000, p=12, неизвестен срок, т.е. n-?. Определим срок из формулы (4.3). Получаем

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{S * ((1+i)^{1/p} - 1)}{R/p} + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\dfrac{120000 * ((1+0,25)^{1/12} - 1)}{500} + 1\right)}{\ln(1+0,25)} = 7,7 \text{ лет.}$$

Полученное значение срока ренты необходимо округлить до ближайшего целого числа. Таким образом, срок ренты равен 8 лет. После этого надо пересчитать размер члена ренты, т.е. найти член ренты для n=8. В этом случае ежемесячный взнос R/p пересчитаем по формуле (4.3)

$$\frac{R}{p} = \frac{S * ((1+i)^{1/p} - 1)}{(1+i)^{n} - 1} = \frac{120000 * ((1+0,25)^{1/12} - 1)}{(1+0,25)^{8} - 1} = 452,26 \text{ д.ед.}$$

Пример 4.3. Под какие проценты клиент должен вложить деньги в банк, чтобы накопить 50 000 д.ед, необходимых для капитального ремонта через 15 лет. Он может ежегодно вкладывать для этой цели в банк 2500 д.ед.

Решение.
Имеем, S=50 000, n=15, R=2500, i-?
Алгебраического решения данной задачи нет. Для получения искомой величины без применения компьютера с соответствующим пакетом программ прибегают к линейной интерполяции или какому-либо итерационному методу. Для решения применим линейную интерполяцию. Для оценки i используется следующая интерполяционная формула

$$i = i_l + \frac{S_{n,i} - S_{n,l}}{S_{n,d} - S_{n,l}} * (i_d - i_l), \qquad (4.36)$$

где $S_{n,i}$ - значение коэффициента наращения (или приведения), для которого определяется размер ставки;

$S_{n,l}$ и $S_{n,d}$ - значения коэффициентов наращения (или приведения) рент для верхнего и нижнего значения ставок (ставки i_d, i_l)

Определим исходный коэффициент наращения ($S_{n,i}$) из формулы (4.2)

$$S_{n,i} = \frac{S}{R} = \frac{50000}{2500} = 20.$$

По таблице, в которой представлены расчетные значения коэффициента наращения годовой ренты, определили, что искомая процентная ставка находится в интервале 3,5-4 %. Для этих значений ставки находим по таблице коэффициенты наращения: $S_{n,l} = S_{15,3,5\ \%} = 19,29568$; $S_{n,d} = S_{15,4\ \%} = 20,02359$. Подставим полученные данные в формулу (4.36)

$$i = 0,035 + \frac{20 - 19,29568}{20,02359 - 19,29568} * (0,04 - 0,035) = 0,0398 \text{ или } 3,98\ \%.$$

Ответ: Клиенту для накопления требуемой суммы надо вложить средства в банк под 3,98 %.

Пример 4.4. Какую сумму надо вложить в банк, который выплачивает 18 % годовых, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого полугодия 1000 д.ед., исчерпав весь вклад к концу 3 года. Начисление процентов производится по полугодиям.

Решение:
Дано: n=3, R=2000, p=2, j=0,18, m=2, P-?
Для решения воспользуемся формулой (4.17)

$$P = R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mn}}{j} = 2000*\frac{1-(1+0{,}18/2)^{-2*3}}{0{,}18} = 4486 \text{ д.ед.}$$

Ответ: В банк надо вложить 4486 д.ед.

ТЕМА 5. ПЛАНИРОВАНИЕ ПОГАШЕНИЯ ЗАДОЛЖЕННОСТИ, КОНВЕРСИЯ ЗАЙМОВ, ФОРМИРОВАНИЕ ФОНДА ПОГАШЕНИЯ

5.1 Конверсия займов и формирование фонда погашения

Последовательность определения параметров конверсионного займа

1. Определяется величина срочной уплаты по первоначальным условиям кредита по формуле

$$R = D\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}, \tag{5.1}$$

где R - размер срочной годовой уплаты до момента конверсии, д.ед.;
D - сумма предоставленного кредита в начале кредитной операции, д.ед.;
n - срок погашения задолженности по первоначальным условиям кредитного договора;
i - процентная ставка по первоначальным условиям кредитного договора, %.

2. Определяется остаток долга на момент конверсии, расчет производится по формуле

$$D_{n-k} = R\frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} * i}, \tag{5.2}$$

где k - число оплаченных расчетных периодов до момента изменения условий кредита.

3.Определяется величина срочной уплаты по новым условиям кредитного договора

$$R_1 = D_{n-k}\,\frac{i_1(1+i_1)^{n-k+n_1}}{(1+i_1)^{n-k+n_1}-1}, \qquad (5.3)$$

где R_1 - размер срочной уплаты по новым условиям кредитного договора, д.ед.;

i_1 - процентная ставка по новым условиям кредитного договора, %;

n_1 - срок, на который продлевается период погашения задолженность по новым условиям кредитного договора.

Варианты создания погасительного фонда

1. проценты выплачиваются регулярно в конце каждого расчетного периода. Срочная уплата (R), включающая проценты и расходы по формированию фонда определяется

$$R=D*i+R_t = D*i+D/S_{n,g}\ , \qquad (5.4)$$

где D –размер предоставленного кредита, д.ед.;

i – ставка процента по кредиту, %;

R_t – взносы в фонд для погашения основного долга, д.ед.;

g – ставка процента по депозиту, %.

2. проценты присоединяются к сумме основного долга. Погашение кредита и начисление процентов производится в конце операции единовременной уплатой по формуле

$$R = \frac{D(1+g)^n}{S_{n,i}}. \qquad (5.5)$$

Если в фонд погашения поступают платежи, изменяющиеся по арифметической прогрессии, то первый взнос (R_{t1})находим по формуле

$$R_{t1} = \frac{1}{S_{n,i}}\left[D - a\,\frac{(1+g)^n - (1+n*g)}{g^2}\right], \qquad (5.6)$$

где а - шаг арифметической прогрессии, д.ед.

Последующий платеж (R_t) определим по формуле

$$R_t=R_{t1}+a*(t-1), \qquad (5.7)$$

где a - шаг прогрессии, д.ед.;
t = 2,3,4 ….

5.2 Погашение долга в рассрочку

При построении плана погашения задолженности используются следующие условные обозначения:

D - сумма долга (современная сумма ренты), д.ед.;
Y - сумма, направляемая на погашение долга, д.ед.;
I - сумма процентов, д.ед.;
R - срочная уплата, д.ед.
n - срок финансовой операции;
i - процентная ставка.

Погашение долга может осуществляться тремя способами:

1. равными суммами (Y=const);
2. переменными суммами по обслуживанию долга (Y=var);
3. равными уплатами (R= const).

При первом способе погашения задолженности размер суммы ежегодно идущей на его погашение (Y) составит

$$Y = D/n, \tag{5.8}$$

где D - сумма долга, д.ед.;
n - срок финансовой операции в годах.

При втором способе погашения долга возможны следующие ситуации:

1. расходы по погашению долга изменяются по арифметической прогрессии;
2. расходы по погашению долга изменяются по геометрической прогрессии.

В случае если расходы по погашению долга изменяются по ***геометрической прогрессии***, то сумма, направляемая на погашение долга (Y_1) равна

$$Y_1 = \frac{D*(q-1)}{q^n-1}, \tag{5.9}$$

где Y_1- размер первого платежа по долгу, д.ед.;

q - шаг геометрической прогрессии, который определяется в зависимости от вида прогрессии. Для убывающей прогрессии q = 1 - процент уменьшения расходов по займу. Для возрастающей прогрессии q = 1+ процент уменьшения расходов по займу. Каждый последующий платеж (Y_2, Y_3 и т.д.) равен предыдущему, умноженному на шаг прогрессии q.

В случае если расходы по погашению долга изменяются по ***арифметической прогрессии***, то сумма, направляемая на погашение долга (Y_1) равна:

$$Y_1 = \frac{D}{n} - \frac{a*(n-1)}{2}, \qquad (5.10)$$

где n - срок финансовой операции;

a - абсолютный прирост, д.ед. Каждый последующий платеж (Y_2, Y_3 и т.д.) больше предыдущего на величину «а».

Если долг погашается равными срочными уплатами ***(R= const)***, то сам размер этой уплаты определяется из формулы современной суммы финансовой ренты (см. выше). Например, если срочные уплаты осуществляются в конце каждого года, а проценты платятся один раз в год, то уплату (R) находим из формулы (4.12) современной ценности годовой ренты с начислением процентов один раз в год.

Срочную уплату (R) можно определить и с помощью другой формулы

$$R = I + Y, \qquad (5.11)$$

где I - сумма процентов, д.ед.;

Y - сумма, направляемая на погашение основного долга, д.ед.

План погашения кредита имеет вид специальной таблицы, приведенной ниже.

Таблица 2 - План (график) погашения кредита

Период	**Сумма долга** **D**, д.ед.	**Срочная уплата** **R,** д.ед.	**Проценты** **I,** д.ед.	**Сумма на погашение долга** **Y= R - I,** д.ед.
1				
2				
и т.д.				
Итого:				

Вопросы для обсуждения:

- конверсия и консолидация займов;
- формирование погасительного фонда;
- составление графика (плана) погашения задолженности.

Примеры решения задач

Пример 5.1. Кредит в 100 000 д.ед. необходимо погасить за 4 года равными срочными уплатами. Проценты на долг начисляются по ставке 20 % в год. Составить план погашения задолженности, если уплаты осуществляются в конце каждого квартала, при этом проценты начисляются 4 раза в год.

Решение:
Погашение долга осуществляется равными срочными уплатами. Размер такой уплаты определяется, исходя из вида финансовой ренты. В данном случае дана рента p-срочная с начислением процентов m раз в году. Уплату по долгу (R/p) находим из формулы (4.16)

$$\frac{R}{p} = \frac{D*((1+j/m)^{m/p}-1)}{1-(1+j/m)^{-mn}} = \frac{100000*((1+0{,}2/4)^{4/4}-1)}{1-(1+0{,}2/4)^{-4*4}} = 9226{,}99 \text{ д.ед.}$$

График погашения будет иметь следующий вид

Таблица 3 - График погашения

Период	**Сумма долга** **D**, д.ед.	**Срочная уплата** **R,** д.ед.	**Проценты** **I,** д.ед.	**Сумма на погашение долга** **Y= R - I,** д.ед.
1кв.	100000	9226,99	100000*0,05=5000	4226,99
2 кв.	100000-4226,99=95773,01	9226,99	95773,01*0,05=4788,65	4438,34
3 кв.	91334,67	9226,99	4566,73	4660,26
4 кв.	86674,41	9226,99	4333,72	4893,27
1 кв.	81781,14	9226,99	4089,06	5137,93
2 кв.	76643,21	9226,99	3832,16	5394,83
3 кв.	71248,38	9226,99	3562,42	5664,57
4 кв.	65583,81	9226,99	3279,19	5947,8
…	…	…	…	…
4 кв.	8787,6	9226,99	439,38	8787,6
Итого:	-	147631,8	47631,8	10000

Пример 5.2. Выплаты в счет погашения основного долга уменьшаются каждый год на 15 %. Срок погашения долга - 5 лет, сумма долга - 15000 д.ед., ставка по долгу - 18 %. Составить план погашения.

Решение.

По условию задолженность будет погашаться переменными суммами (Y=var). Сумма, направляемая на погашение долга, определяется по формуле (5.9)

$$Y_1 = \frac{D*(q-1)}{q^n-1} = \frac{15000*(0{,}85-1)}{0{,}85^5-1} = 4044{,}62 \text{ д.ед.,}$$

где q - шаг убывающей геометрической прогрессии, q = 1-0,15=0,85.

Определим остальные суммы, направляемые клиентом в счет погашения задолженности

$Y_2 = Y_1*q = 4044{,}62*0{,}85 = 3437{,}93$

$Y_3 = Y_2*q = 3437{,}93*0{,}85 = 2922{,}24$ и т.д.

Составим график погашения долга.

Таблица 4 - График погашения кредита

Период	**Сумма долга** **D**, д.ед.	**Срочная уплата** **R,** д.ед. **R= I+ Y**	**Проценты** **I,** д.ед.	**Сумма на погашение долга Y,** д.ед.
1	15000	6744,62	15000*0,18=2700	4044,62
2	15000-4044,62=10955,38	5409,9	10955,38*0,18=1971,97	3437,93
3	7517,45	4275,38	1353,14	2922,24
4	4595,21	3311,04	827,14	2483,90
5	2111,32	2491,36	380,04	2111,32
Итого:	-	22232,3	7232,3	15000

Пример 5.3. Кредит в сумме 10 000 д.ед. выдан на 4 года под 20 % годовых. Для его погашения создается погасительный фонд. На инвестируемые в него средства начисляется 22 % годовых. Составить план формирования фонда.

Решение.

Дано D=10000, i=0,2, g=0,22, n=4.

Определим по формуле (5.4) размер срочных уплат

$$R=D*i+R_t = D*g+D/S_{n,g}=10000*0{,}20+10000/S_{4,22\,\%} =3810{,}20 \text{ д.ед.,}$$

где R_t – взносы в фонд для погашения основного долга, которые определяются как $D/S_{n,g}=10000/S_{4,22\%}$ = 1810,20 д.ед. Полученная величина взносов в фонд будет постоянна. Составим план формирования фонда.

Таблица 5 - План формирования фонда

Период	Расходы по займу R= I+ R_t, д.ед.	Проценты I= D*i, д.ед.	Взносы R_t, д.ед.	Накопления, т.е. сумма взноса с процентами на конец срока
1	3810,20	10000*0,2=2000	1810,20	$1810,2*(1+0,22)^3$=3287,05
2	3810,20	2000	1810,20	$1810,2*(1+0,22)^2$=2694,30
3	3810,20	2000	1810,20	$1810,2*(1+0,22)^1$=2208,45
4	3810,20	2000	1810,20	1810,2
Итого:	15240,8	10000	7240,8	10000

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

ВАРИАНТ 1

1. Банк принимает вклады на срочный депозит на следующих условиях: процентная ставка при сроке 35 дней – 45 %; при сроке 65 дней – 48 %; при сроке 90 дней –50 %. Рассчитайте доход клиента при вкладе 10 000 д.ед. на указанные сроки. Год не високосный. Методика расчета: точные проценты с точным числом дней.
2. Определите период времени, необходимый для удвоения капитала по простым и сложным процентам при процентной ставке 12 % годовых. В последнем случае начисления процентов ежемесячное.
4. Гражданин Петров должен уплатить гражданину Кузнецову три раза по 25000 д.ед. через каждые полтора года от настоящего момента. Гражданин Петров предложил заплатить 30000 д.ед. через 2 года, а остальные еще через 2 года. Какую сумму он должен уплатить в последний раз, если деньги стоят 9 % сложных годовых?

ВАРИАНТ 2

1. Клиент вложил в банк на депозит 2000 тыс. руб.на срок с 12 апреля по 26 мая с простой процентной ставкой 36 % годовых. Рассчитайте доход клиента по трем методикам. Год не високосный.
2. Определите период времени, необходимый для утроения капитала по простым и сложным процентам при процентной ставке 48 % годовых, В последнем случае начисление процента квартальное.
3. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке, j_4 = 6%. Какова современная ценность суммы денег в 25 000 д.ед., которая: а) была вложена в этот банк 5 лет 4 месяца тому назад, б) будет вложена в банк через 1 год 8 месяцев.
4. Гражданин вкладывает 25000 д.ед. в конце каждого года в банк, выплачивающий проценты по ставке 5% сложных годовых. Какая сумма будет на счету: а) через 3 года; б) через 10 лет?

ВАРИАНТ 3

1. Коммерческий банк привлекает средства населения под простые проценты с

процентной ставкой 36 % годовых. Клиент внес 6000 д.ед. на депозит с 12 февраля по 24 апреля. Определите величину коэффициента наращения и наращенную сумму для случая: а) точных процентов с точным числом дней; в) обыкновенных процентов с приближенным числом дней. Год не високосный.

2. Сколько времени нужно хранить вклад в банке под 84 % годовых при ежемесячном, поквартальном и полугодовом начислении процентов, чтобы сумма вклада удвоилась. Методика расчета банковская.

3. Г-н Сидоров положил в банк, выплачивающий проценты по годовой ставке i = 5 % (сложных) сумму 12000 д.ед.. Через 1 год 6 месяцев он снял со счёта 4500 д.ед. а ещё через 2 года положил на свой счёт 2 000 д.ед. После этого, через 3 года 6 месяцев он закрыл счёт. Какую сумму он получил?

4. Страховая компания заключила договор с фирмой на 3 года. Поступающие от клиента ежегодные страховые взносы в размере 5 млн.д.ед. она помещает в банк под 15 % годовых с начислением процентов по полугодиям. Определите сумму, полученную страховой компанией по контракту.

ВАРИАНТ 4

1. Клиент поместил в банк 3 000 д.ед. 1 февраля под простые проценты. Процентная ставка банка с 1 февраля по 18 февраля – 22 % годовых; с 19 февраля по 7 марта – 20 % годовых; с 8 марта по 23 марта – 18 % годовых; с 24 марта по 19 апреля, когда был изъят вклад -16 % годовых. Определите доход клиента и эффективную процентную ставку. Методика расчета: обыкновенные проценты с приближенным числом дней.

2. Клиент внес на депозит сроком на 4 месяца 1600 тыс. руб. Начисление процентов ежемесячное. После окончания срока получил 1732 тыс. руб. Определите процентную ставку банка.

3. Г-н Иванов положил 3 года назад 5 000 д.ед. в банк, выплачивающий проценты по ставке j_2 = 8 %. Год назад он положил ещё 2 000 д.ед., а через 3 года 6 месяцев после этого снял со счёта 3 500 д.ед. Ещё через 6 месяцев он желает положить на свой счёт такую сумму, чтобы ещё через год на счету было 10 000 д.ед. Какую сумму он должен положить на свой счёт в последний раз?

4. Гражданин хочет накопить за 6 лет 40000 д.ед., делая равные ежегодные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке 10 % сложных годовых. Какую сумму должен вкладывать ежегодно гражданин?

ВАРИАНТ 5

1. Клиент внес в банк 14 000 д.ед. на срок с 14 февраля по 23 июля. На вклады «до востребования» сроком больше месяца банк начисляет 24 % простых годовых. Определите наращенную сумму при расчете по: а) точным процентам с точным числом дней; б) банковскому методу; в) обыкновенным процентам с приближенным числом дней. Год не високосный.

2. Какой должна быть минимальная процентная ставка, чтобы произошло удвоение вклада за год при начислении процентов: а) поквартально, б) ежемесячно.

3. Покупатель обязался уплатить фермеру за купленное у него зерно 3 500 000 д.ед. через 2 месяца после покупки, 3 000 000 - ещё через 2 месяца и 5 200 000 - ещё через 3 месяца. Стороны договорились объединить эти платежи в один и выплатить

его через 5 месяцев после покупки. Чему равен этот платёж, если на деньги начисляется 8 % годовых?

4. Пенсионер вкладывает в начале каждого месяца в банк по 50 д.ед. под 60 % годовых. Определите, через какое время он накопит сумму, достаточную для покупки холодильника стоимостью 3000 д.ед. Проценты начисляются ежемесячно.

ВАРИАНТ 6

1. Клиент внес в сбербанк 3 000 д.ед. Согласно условиям договора «до востребования», процентная ставка может быть изменена банком в одностороннем порядке. Вклад внесен 3 апреля под 24 % годовых. 22 апреля процентная ставка, согласно решению Правления банка, установлена в 20 % годовых, а 20 мая – 15 % годовых. Вклад вместе с процентами получен 3 июня. Определите наращенную сумму, если расчет процентов производится по точным простым процентам с точным числом дней в году (К=365).
2. Какие условия предпочтет клиент при получении кредита: а) процентная ставка - 30 %, начисление процентов ежемесячное; б) процентная ставка - 32 %, начисление процентов ежеквартальное; в) процентная ставка - 33 %, начисление процентов по полугодиям.
3. Г-н А должен уплатить г-ну Б три раза по 25000 д.ед. через каждые полтора года от настоящего момента. Г-н А предложил заплатить 30000 д.ед. через 2 года, а остальное - ещё через 2 года. Какую сумму он должен уплатить в последний раз, если деньги стоят 9 % годовых (сложных)?
4. Какую сумму надо вложить в банк, выплачивающий 5 % годовых, чтобы иметь возможность снимать: а) в конце каждого года, б) в конце каждого полугодия, в) в конце каждого месяца 50000 д.ед., исчерпав весь вклад к концу десятого года?

ВАРИАНТ 7

1. Клиент получил кредит сроком на 3 месяца в 6000 д.ед. Сумма возврата кредита – 7500 д.ед. Определите простую процентную ставку банка.
2. Гражданин имеет вексель на 15000 д.ед., который он хочет учесть 1 марта текущего года в банке по сложной учетной ставке, равной 7 %. Какую сумму он получит, если срок векселя: а) 1 июля того же года; б) 1 июля следующего года?
3. Г-н Васильев купил у г-на Дмитриева автомобиль, подписав контракт, в соответствии с которым обязался уплатить 1500 000 д.ед. через 8 месяцев после момента покупки и 2 000 000 д.ед. через 18 месяцев после момента покупки. Г-н Дмитриев желает продать этот контракт банку, получающему 6 % годовых (сложных) на свои деньги. Какую сумму заплатит банк за этот контракт, если купит его в момент его заключения?
4. Перед выходом на пенсию гражданин хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 50000 д.ед. неограниченно долго. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 5 % годовых?

ВАРИАНТ 8

1. На какой срок выдан кредит в 30000 д.ед. под процентную ставку 30 % простых годовых, если банк получил сумму от кредитора 38000 д.ед. Методика расчета: банковская.
3. Определите, какую сумму необходимо поместить на депозит, чтобы через три года получить 40000 д.ед. при уровне процентных ставок: а) 8 % годовых; б) 12 % годовых; в) 20 % годовых.
4. Предприятие должно заплатить 50 000 д.ед. в момент заключения сделки, 75 000 д.ед. через 3 месяца и еще 90 000 через 4 месяца. Было решено объединить данные платежи в один в сумме 260 000 д.ед. Определить срок объединенного платежа, если на деньги начисляется: а) 11 % простых годовых, б) 9,5 % сложных годовых.
4. Какую сумму должна ежемесячно в конце месяца переводить фирма в банк, чтобы на счету через 2 года была сумма 30000 д.ед.. Номинальная, процентная ставка банка при ежемесячном начислении процентов - 12 %.

ВАРИАНТ 9

1. Определите, какую процентную ставку должна установить при кредите 2000 тыс. руб. финансовая компания, чтобы при сроке кредита в 84 дня иметь прибыль не менее 120 тыс. руб. Проценты простые обыкновенные с приближенным числом дней.
2. Банк принимает валютные вклады на депозит с номинальной процентной ставкой 12 % годовых. Начисление процентов – ежемесячное. Определите доход клиента при вкладе 2500 тыс. руб.и сроке вклада 6 месяцев.
3. Банк выплачивает по вкладам 6 % сложных годовых. Какова реальная доходность вкладов в этот банк, если начисление процентов производится: а) по полугодиям; б) поквартально; в) ежемесячно; г) непрерывно.
4. Организация создает фонд в 60000 д.ед. Намечено создать его в течении 3 лет: а) равными годовыми платежами в начале каждого года, б) равными ежемесячными платежами в начале месяца. Процентная ставка банка - 36 %, и проценты начисляются один раз в год. Определите величину разового платежа.

ВАРИАНТ 10

1. Годовая процентная ставка простых процентов равна 12,5 %. Через сколько лет начальная сумма а) удвоится, б) утроится?
2. Банк учитывает вексель за 60 дней до срока его оплаты по простой учетной ставке, равной 6 %. Какую сложную учетную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?
3. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке, j_4 = 6 %. Какова современная ценность суммы денег в 25 000 д.ед., которая а) была вложена в этот банк 5 лет 4 месяца тому назад, б) будет вложена в банк через 1 год 8 месяцев.
4. Банк оказывает услугу по формированию специального пенсионного фонда. Предприятие перечисляет 100 д.ед. в конце каждого месяца на каждого работника. На эту сумму ежемесячно начисляются 12 % годовых. Какая сумма накопится в расчете на каждого работника, который выйдет на пенсию через: а) четыре года; б) 10 лет; в) 25 лет?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башарин Г.П. Начала финансовой математики /Г.П. Башарин.- М.: ИНФРА-М., 1997. - 160 с.
2. Бухвалов А.В. Самоучитель по финансовым расчетам / А.В. Бухвалов, А.В. Идельсон. - М.: Мир, Прогресс-сервис, 1997. - 176 с.
3. Количественные методы финансового анализа: Перевод с англ. / Под ред. С.Дж.Брауна и М.П.Крицмена. - М.: ИНФРА-М, 1996. - 336 с.
4. Финансовая математика: теория и практика финансово-банковских расчетов: Пер.с серб. / Е. Кочович; Предисл. Е.М.Четыркина. - М.: Финансы и статистика, 1994. - 268 с.
5. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям /Я.С. Мелкумов.- М.: ИНФРА-М, 1996. - 336 с.
6. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е.М. Четыркин. - М.: "Дело Лтд", 2000. - 320 с.
8. Математика для экономистов: Учеб.пособие / А. Черняк, В. Новиков, О. Мельников, А. Кузнецов.-СПб.: БХВ-Петербург,2003.-486 с.