Глава 4. Основные законы распределения непрерывной случайной величины.

4.1. Равномерный закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке плотность распределения случайной величины сохраняет постоянное значение, а именно:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & \text{если}\, a \le x \le b, \\ 0, & \text{если}\, x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Равномерный закон распределения применяется, например, при анализе ошибок округления при выполнении численных расчётов; так ошибка округления числа с точностью до 0,1 распределена равномерно на отрезке [-0,05;0,05].

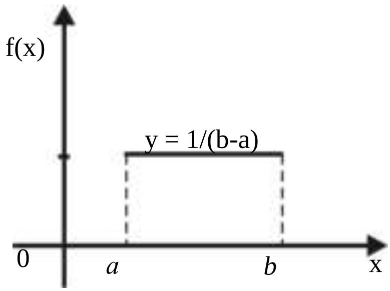

Рис.7. Плотность вероятности равномерного распределения

Найдём функцию распределения x $F(x)$ для равномерного распределения на промежутке $[a; b]$ по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \, .$$

После подстановки функции $f(t)$,в результате интегрирования получим формулу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если}\, \mathrm{x} < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если}\, \mathrm{a} \le \mathrm{x} \le b, \\ 1, & \text{если}\, \mathrm{x} > b, \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание $M(x)$ для равномерного распределения на промежутке $[a; b]$ по формуле:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{x\infty} t \cdot f(t)dt \, .$$

После подстановки функции $f(t)$, в результате интегрирования получим формулу

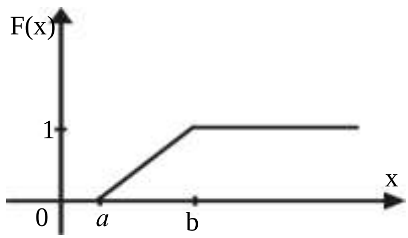

Рис.8. Функция распределения равномерного распределения

$$M(x) = \int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \frac{a+b}{2}.$$

Найдём дисперсию $D(x)$ для равномерного распределения на промежутке $[a; b]$ по формуле:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - M(X))^2 \cdot f(t)dt.$$

После подстановки функции $f(t)$ и математического ожидания $M(X)$, в результате интегрирования получим формулу

$$D(x) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Найдём вероятность $P(\alpha < X < \beta)$ попадания случайной величины X, имеющей равномерное распределение на промежутке $[a; b]$, в интервал (α, β), содержащийся внутри промежутка $[a; b]$, по формуле:

$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

В результате, получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Пример. Троллейбусы отходят от остановки регулярно с интервалом 10 мин. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Найти вероятность того, что ему придётся ждать не больше 2 минут, а также математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X- времени ожидания троллейбуса.

Решение. Случайная величина X - время ожидания троллейбуса, имеет равномерный закон распределения на промежутке [0; 10]. При этом плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10, & \text{если } 0 \le x \le 10, \\ 0, & \text{если } x \notin [0;10]. \end{cases}$$

Вероятность того, что пассажиру придётся ждать троллейбус не больше 2 минут, найдём, подставив в формулу

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

значения $\alpha = 0$; $\beta = 2$; $a = 0$; $b = 10$

$$P(0 < X < 2) = \frac{2 - 0}{10 - 0} = 0{,}2.$$

Математическое ожидание будет равно

$$M(x) = \frac{a + b}{2} = \frac{0 + 10}{2} = 5.$$

Вычислим теперь дисперсию

$$D(x) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{(10 - 0)^2}{12} = 25/3.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 5\sqrt{3}/3$.

Ответ: $p = 0{,}2$; $M(X) = 5$; $\sigma(X) = 5\sqrt{3}/3$.

4.2. Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

где λ - постоянное положительное число.

Показательное распределение используется, например, в теории массового обслуживания и исследовании операций.

Найдём функцию распределения случайной величины X по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

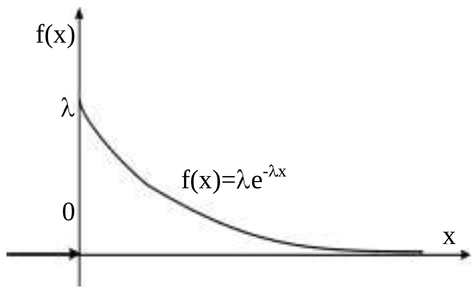

Рис. 9. Плотность вероятности показательного распределения

После подстановки функции $f(t)$, в результате интегрирования получим формулу

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x\ge 0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Формулу для математического ожидания случайной величины X, распределенной по показательному закону получим, если проинтегрируем по частям несобственный интеграл

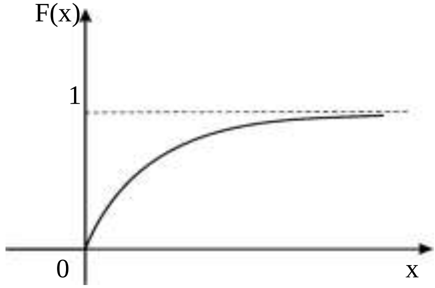

Рис.10. Функция распределения показательного закона

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot f(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}\lambda x\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ.

Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D(X)=\int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2$$

В результате получим $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Значит, среднее квадратическое отклонение можно вычислить по формуле:

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Замечание. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

Пример. Случайная величина Т - время работы электроприбора - имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы электроприбора будет не меньше 60000 часов, если среднее время работы электроприбора равно 40000 часов.

Решение: Поскольку математическое ожидание равно значению случайной величины (среднему времени работы электроприбора), то M(T) = 40000. Следовательно, $\frac{1}{\lambda}$ = 40000.

Искомую вероятность найдём по формуле

$$P(T > 60000) = 1 - P(T \le 60000).$$

Заменив вероятность события $P(T \le 60000)$ на функцию распределения F(60000), получим

$$P(T > 60000) = 1 - F(60000)=1 - (1-e^{-60000/40000})=e^{-1,5}\approx 0,2231.$$

Ответ: 0,2231.

4.3. Нормальный закон распределения

Определение Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, плотность вероятности которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальный закон распределения занимает центральное место среди распределений непрерывных случайных величин.

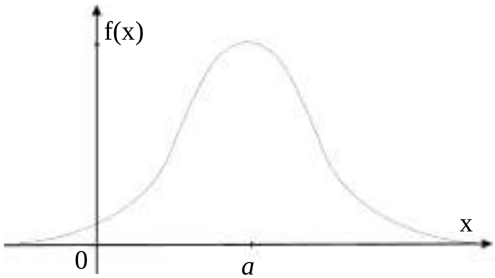

Рис.11

Он наблюдается во всех случаях, когда случайная величина *X* является результатом действия большого числа факторов, каждый из которых не имеет решающего воздействия на *X*.

Примерами случайных величин, имеющих нормальное распределение, являются ошибки измерения или отклонения в размерах деталей от планируемых при изготовлении их на станках с программным управлением.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, распределённой по нормальному закону, равно параметру **а** в формуле для плотности вероятности $f(x)$ этого закона, т.е.

$$M(X) = a,$$

а её дисперсия – параметру σ^2, т.е.

$$D(X) = \sigma^2.$$

(без доказательства).

Таким образом, параметр σ в плотности вероятности нормального закона распределения есть среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Перечислим без доказательства основные свойства для нормального распределения:

<u>Свойство 1.</u> Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), можно найти по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt \text{ - функция Лапласа.}$$

Таблица значений функции Лапласа для неотрицательных значений аргумента x приведена в Приложении 2; в случае когда значение x отрицательно, нужно использовать свойство нечётности Функция Лапласа, т.е., $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При этом, если $x > 5$, то можно считать, что $\Phi(x) = 0,5$.

<u>Свойство 2.</u> Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределённой по нормальному закону, от математического ожидания a не превысит положительную величину δ равна

$$P(|X - a| \le \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

В частности, при $a = 0$ справедливо равенство

$$P(|X| \le \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

Если в формуле $P(|X - a| \le \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$ брать различные значения δ, то получим следующую таблицу

$\delta = \sigma$	$P(\lvert X - a\rvert \le \delta) = 2\Phi(1) = 0{,}6827$
$\delta = 2\sigma$	$P(\lvert X - a\rvert \le \delta) = 2\Phi(2) = 0{,}9545$
$\delta = 3\sigma$	$P(\lvert X - a\rvert \le \delta) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$

Отсюда вытекает «правило трёх сигм»:

Если случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ, то практически достоверно, что её значения заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Свойство 3. Мода и медиана нормального распределения соответственно равны:

$$M_o = a, M_e = a.$$

Пример. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине число 10.

Решение: По условию имеем, $a = 0$; $\sigma = 20$; $\delta = 10$. Применим формулу $P(|X| \le \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)$. Получим, $P(|X| \le 10) = 2\Phi(0{,}5)$. По таблице Приложения 1 находим $\Phi(0{,}5) = 0{,}1915$. Значит,

$$P(|X| \le 10) = 0{,}383.$$

Ответ: 0,383.

Пример. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $a = 5$; $\sigma = 1$. Найти вероятность того, что величина X примет значения, принадлежащие промежутку [4; 7].

Решение. Искомую вероятность найдём по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\alpha = 4$; $\beta = 7$; $a = 5$; $\sigma = 1$. Получим,

$P(4 < X < 7) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185.$

Ответ. 0,8185.

Глава 5. Многомерные случайные величины

5.1. Понятие многомерной случайной величины

Часто для изучения некоторых процессов приходится использовать две, три и большее число случайных величин. Например, для описания физического состояния человека приходится анализировать систему случайных величин: X_1 - давление; X_2 - температуру; X_3 - пульс и т.п. Систему нескольких случайных величин $X_1, X_2, X_3,\ldots, X_n$ принято записывать в круглых скобках $(X_1, X_2, X_3,\ldots, X_n)$. При изучении системы случайных величин необходимо знать не только поведение каждой случайной величины, но также ещё и степень зависимости между ними.

Случайные величины, входящие в систему, могут быть как дискретными, так и непрерывными. Геометрически систему из двух случайных величин (X, Y) можно рассматривать как случайную точку на плоскости или как случайный вектор на плоскости; систему из трёх случайных величин (X, Y, Z) можно рассматривать как случайную точку в трёхмерном пространстве или как случайный вектор в пространстве. Если число случайных величин, входящих в систему, больше трёх, то эту систему рассматривают как случайную точку в n-мерном пространстве, хотя геометрической наглядности в этом случае нет.

В дальнейшем мы будем рассматривать системы из двух случайных величин; при этом все основные понятия касающиеся системы двух случайных величин, можно по аналогии перенести на системы из трёх и более случайных величин.

5.2. Закон распределения системы дискретных случайных величин. Таблица распределения

Определение. Законом распределения системы случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений случайных величин и соответствующими вероятностями.

Так, если рассматривается двумерная случайная величина (X, Y), то её закон распределения можно задать в виде матрицы (таблицы распределения). Пусть возможными значениями случайной величины X являются числа $x_1, x_2,\ldots, x_n$, а возможными значениями случайной величины Y являются числа $y_1, y_2,\ldots, y_m$. Тогда закон распределения этой системы состоит в том, что в таблице записывают вероятности $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ того, что случайная величина X

примет значение x_i и одновременно с этим случайная величина Y примет значение y_j:

X	1	2		m
1	11	12		1m
2	21	22		2m
n	n1	n2		nm

Так как события ($X = x_i;Y = y_j$), состоящие в том, что случайная величина X примет значение x_i и одновременно с этим случайная величина Y примет значение y_j несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.,

$$\sum_{i,j} p_{ij} = \sum_{i,j} P(\mathrm{X} = \mathrm{x_i}, Y = y_j) = 1.$$

(Сумма всех элементов таблицы распределения всегда равна единице.)

Если просуммировать элементы таблицы распределения по строкам, то найдём закон распределения одномерной случайной величины X:

$$P(X = x_i) = P_{i1}+P_{i2}+\ldots+P_{in},\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Аналогично, если просуммировать элементы таблицы распределения по столбцам, то найдём закон распределения одномерной случайной величины Y:

$$P(Y = y_j) = P_{1j}+P_{2j}+\ldots+ P_{nj},\ (j=1,2,\ldots,m).$$

Определение. **Условным распределением составляющей *X*** при $Y = y_j$ (y_j сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях X) называют совокупность условных вероятностей $P(x_1|y_j),P(x_2|y_j),\ldots,P(x_n|y_j)$.

Определение. **Условным распределением составляющей *Y*** при $X = x_i$ (x_i сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях Y) называют совокупность условных вероятностей $P(y_1|x_i)$, $P(y_2|x_i),\ldots$, $P(y_m|x_i)$. Поэтому по теореме умножения вероятностей

$$P(x = x_i, y = y_i) = P(x = x_i)\cdot P(y = y_i | x = x_i) = P(y = y_i)\cdot P(x = x_i | y = y_i);$$

условные вероятности составляющих X и Y вычисляют по формулам:

$$P(x_i|y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)/P(Y = y_j) = P_{ij}/P(Y = y_j);$$

$$P(y_j|x_i) = P(X = x_i, Y = y_j)/P(X = x_i) = P_{ij}/P(X = x_i).$$

Пример. Двумерная случайная величина (X, Y) задана таблицей распределения:

x_i \ y_i	$y_1 = 10$	$y_2 = 14$	$y_3 = 18$
$x_1 = 3$	0,25	0,15	0,32
$x_2 = 6$	0,10	0,05	0,13

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих X и Y;

б) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение $y = 10$;

в) условный закон распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение $x = 6$.

Решение. а) Если сложить элементы таблицы распределения по строкам, то найдём закон распределения одномерной случайной величины X:

$$P(X = x_i) = P_{i1}+P_{i2}+P_{i3},\ (i = 1,2);$$

поэтому

$$P(X = 3) = 0,25 + 0,15 + 0,32 = 0,72,$$

$$P(X = 6) = 0,10 + 0,05 + 0,13 = 0,28.$$

Если сложить элементы таблицы распределения по столбцам, то найдём закон распределения одномерной случайной величины Y:

$$P(Y = y_j) = P_{1j}+P_{2j},\ (j = 1,2,3);$$

поэтому

$$P(Y = 10) = 0,25 + 0,10 = 0,35,$$

$$P(Y = 14) = 0,15 + 0,05 = 0,20,$$

$$P(Y = 18) = 0,32 + 0,13 = 0,45.$$

Получили законы распределения

x_i	3	6
p_i	0,72	0,28

y_j	10	14	18
p_j	0,35	0,20	0,45

Контроль: 0,72 + 0,28 = 1

Контроль: 0,35 + 0,2 +0,45 = 1

б) Найдём условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение Y=10 по формулам:

$$P(x_i|y_1)= P_{i1}/P(Y=y_1).$$

Будем иметь

$$P(x_1|y_1) = P_{11}/P(Y = y_1) = 0{,}25/0{,}35 = 5/7.$$

$$P(x_2|y_1) = P_{21}/P(Y = y_1) = 0{,}10/0{,}35 = 2/7.$$

Напишем условный закон распределения:

x_i	3	6
$P(x_i\|Y = 10)$	5/7	2/7

в) Найдём условные вероятности возможных значений Y при условии, что составляющая X приняла значение X = 6 по формулам:

$$P(y_j|x_2) = P_{2j}/P(X = x_2).$$

Будем иметь

$$P(y_1|x_2) = P_{21}/P(X = x_2) = 0{,}10/0{,}28 = 5/14.$$

$$P(y_2|x_2) = P_{22}/P(X = x_2) = 0{,}05/0{,}28 = 5/28.$$

$$P(y_3|x_2) = P_{23}/P(X = x_2) = 0{,}13/0{,}28 = 13/28.$$

Напишем условный закон распределения:

y_j	10	14	18
$P(y_j \mid X = 6)$	5/14	5/28	13/28

Контроль: $\frac{5}{14} + \frac{5}{28} + \frac{13}{28} = 1$

Ответ.

а)

y_j	10	14	18
P_j	0,35	0,20	0,45

x_i	3	6
p_i	0,72	0,28

б)

x_i	3	6
$P(x_i \mid Y = 10)$	5/7	2/7

в)

y_j	10	14	18
$P(y_j \mid X = 6)$	5/14	5/28	13/28