Свойства плотности распределения вероятности:

Свойство 1. Плотность распределения вероятности - неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.

Доказательство: По определению $f(x) = F'(x)$, а функция $F(x)$ - монотонно неубывающая, значит, производная $F'(x)$ - неотрицательная функция.

Свойство 2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $[a, b]$ равна определённому интегралу от её плотности распределения вероятности в пределах от a до b, т.е.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt,$$

Доказательство: По свойству функции распределения, вероятность того, что случайная величина X принадлежит интервалу $[a; b]$ равна приращению функции распределения $F(x)$, т.е.,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Далее, учитывая свойство интегралов, можно записать

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b F'(t)dt$$

Но по определению

$$f(t) = F'(t),$$

поэтому,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Геометрически свойство 2 означает, что вероятность $P(a \leq X \leq b)$ равна площади фигуры, ограниченной кривой распределения $y = f(x)$, осью абсцисс, и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Свойство 3. По известной плотности распределения можно найти Функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Доказательство: Эту формулу получим, если в формуле Свойства 2 положим верхний предел интегрирования $b=x$, а нижний предел интегрирования $a = -\infty$.

Свойство 4. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице, т.е.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Доказательство: Пусть верхний предел в формуле Свойства 3 (переменная x) стремится к $+\infty$ (при этом $F(x) \to 1$). В результате предельного перехода получим нужную формулу.

Замечание: Геометрически формула Свойства 4 означает, что площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс всегда равна единице.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x, & \text{если } |x| < \pi/2. \\ 0, & \text{если } |x| \geq \pi/2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и вероятность того, что X примет значения, принадлежащие интервалу $[0; \pi/4]$.

Решение: Плотность распределения $f(x)$ должна удовлетворять

Свойству 4. Потребуем, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ для заданной функции $f(x)$;

получим

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cdot \cos x dx = 1.$$

После интегрирования, будем иметь

$$a(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) = 1;$$

Значит, $2a = 1$; отсюда, $a = 1/2$.

Вероятность найдём по формуле:

$$P(0 \leq X \leq \pi/4) = \int_0^{\pi/4} a \cdot \cos t dt.$$

После интегрирования получим

$$P(0 \le X \le \pi/4) = (\sin(\pi/4) - \sin 0)/2 = \sqrt{2}/4.$$

Ответ: $a = 1/2$; $P(0 \le X \le \pi/4) = \sqrt{2}/4$.

3.5. Числовые характеристики дискретных случайных величин. (Математическое ожидание и дисперсия)

Определение. **Математическим ожиданием** $M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счётное (бесконечное) множество возможных значений, то математическое ожидание равно сумме ряда

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Замечание. Математическое ожидание $M(X)$ является **средним значением** случайной величины X.

Пример. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	6	3	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Решение: По определению, математическое ожидание $M(X)$ случайной величины равно сумме произведений всех её возможных значений на их вероятности, поэтому,

$$M(X) = 6 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 = 2{,}6.$$

Ответ: $M(X) = 2{,}6$.

Свойства математического ожидания:

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

Доказательство. Постоянную величину C можно рассматривать как случайную величину, заданную законом распределения:

x_i	C
p_i	1

Поэтому,

$$M(X) = C \cdot 1 = C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

Доказательство. Закон распределения случайной величины $C \cdot X$ можно представить следующей таблицей

Cx	Cx_1	Cx_2	….	Cx_n
p	p_1	p_2	….	p_n

Поэтому

$$M(C \cdot X) = C \cdot x_1 \cdot p_1 + C \cdot x_2 \cdot p_2 + \ldots + C \cdot x_n \cdot p_n = C \cdot M(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно такой же сумме их математических ожиданий:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

(Без доказательства).

Свойство 4. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий их сомножителей:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_1)$$

(Без доказательства).

Пример. Найти вероятности p_1, p_2 ,p_3 случайной величины X, заданной законом распределения:

i			
i	1	2	3

если известны математические ожидания случайной величины X и её квадрата: $M(X) = 2{,}3$; $M(X^2) = 5{,}9$.

Решение: Для определения вероятностей запишем систему алгебраических уравнений. Сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице, поэтому, должно выполняться условие

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Учитывая определение математического ожидания $M(X)$ получим второе уравнение:

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 2{,}3.$$

Случайная величина X^2 имеет закон распределения:

$x_i)^2$			
i	1	2	3

По условию математическое ожидание $M(X^2) = 5{,}9$, поэтому получим третье уравнение:

$$p_1 + 4p_2 + 9p_3 = 5{,}9.$$

Решив эту систему, найдём $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.

Ответ: $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.

Определение. **Дисперсией** $D(X)$ дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

По определению

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счётное (бесконечное) множество возможных значений, то

$$D(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

Замечание. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины; в качестве показателя степени рассеяния случайной величины от среднего значения используют среднее квадратическое отклонение.

Определение. **Средним квадратическим отклонением** случайной величины σ(X) называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Доказательство.

Имеем,

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X).$$

Доказательство. Имеем,

$$D(C \cdot X) = M(C \cdot X - M(C \cdot X))^2 = M(C \cdot X - C \cdot M(X))^2 = C^2 \cdot M(X - M(X))^2 = C^2 \cdot D(X).$$

Свойство 3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий от каждой случайной величины:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

(Без доказательства).

Свойство 4. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом её математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Доказательство. Пусть $M(X) = m_x$.

Тогда,

$$D(X) = M(X - m_x)^2 = M(X^2 - 2X{\cdot}m_x + m_x^2) = M(X^2) - 2M(X){\cdot}m_x + m_x^2 = M(X^2) - M(X)^2.$$

Это свойство часто используют при вычислении дисперсии.

Пример. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	4,3	5,1	10,6
p_i	0,2	0,3	0,5

Решение: Запишем закон распределения случайной величины X^2**:**

$_i^2$	8,49	6,01	1 12,36
$_i$	,2	,3	0 ,5

Найдём $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 18{,}49{\cdot}0{,}2 + 26{,}01{\cdot}0{,}3 + 112{,}36{\cdot}0{,}5 = 67{,}681.$$

Вычислим $M(X)$:

$$M(X) = 4{,}3{\cdot}0{,}2 + 5{,}1{\cdot}0{,}3 + 10{,}6{\cdot}0{,}5 = 7{,}69.$$

Тогда, по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, получим

$$D(X) = 67{,}681 - 59{,}1361 = 8{,}5449.$$

Найдём, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{8{,}5449} = 2{,}9232.$

Ответ: $D(X) = 8{,}5449$; $\sigma(X) = 2{,}9232$.

Пример. Игральная кость брошена два раза. Найти закон распределения случайной величины X – числа выпадания четного числа очков. Найти также математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Вероятность появления четного числа очков при каждом бросании игральной кости равна $P = ½$, следовательно, $q = 1 – ½ = ½$.

Число выпадений четного числа очков X при двух бросаниях игральной кости может принимать значения $X = 0$ или $X = 1$, или $X = q$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_{01} = P(X = 0) = C_1^0 \cdot q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

$$P_{12} = P(X = 1) = C_2^1 \cdot p \cdot q = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P_{22} = P(X = 2) = C_2^2 \cdot p^2 \cdot q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

Запишем закон распределения случайной величины X в виде таблицы

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Вычислим математическое ожидание

$$M(x) = 0·0{,}25 + 1·0{,}5 + 2·0{,}25 = 1$$

Запишем закон распределения случайной величины X^2 в виде таблицы

X^2	0	1	4
P	0,25	0,5	0,25

Найдем

$$M(x^2) = 0·2{,}25 + 1·0{,}5 + 4·0{,}25 = 1$$

Тогда по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

получим

$$D(X) = 1,5 - 1^2 = 0,5$$

Найдем среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $M(x) = 1$; $D(X)= 0,5$; $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3.6. Биномиальный закон распределения

Определение: **Биномиальным** называют закон распределения дискретной случайной величины X - числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события постоянна и равна p. Вероятность того, что в n испытаниях событие будет наблюдаться m раз (случайная величина X равна m) вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_{mn}= P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	…	$C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$	…	p^n

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, распределённой по биномиальному закону, можно вычислить по формуле

$$M(X) = n \cdot p,$$

а её дисперсию можно вычислить по формуле

$$D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

<u>Доказательство:</u> Запишем формулу разложения бинома Ньютона:

$$(p + q)^n = p^n + C_n^1 \cdot p^{n-1} \cdot q + C_n^2 \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \ldots + C_n^m \cdot p^{n-m} \cdot q^m + \ldots + q^n .$$

Продифференцируем это равенство по переменной p и умножим обе части полученного равенства на переменную p; получим

$$n \cdot p \cdot (q + p)^{n-1} = n \cdot p^n + (n - 1) \cdot C_n^1 \cdot p^{n-1} \cdot q + (n - 2) \cdot C_n^2 \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \ldots +$$
$$+ (n - m) \cdot C_n^m \cdot p^{n-m} \cdot q^m + \ldots .$$

Учитывая, что $q + p = 1$, левая часть равенства равна $n \cdot p$; правая часть представляет сумму произведений элементов первой строки таблицы для ряда распределения на элементы второй строки таблицы (суммирование выполняется с конца таблицы).

Т.о. математическое ожидание равно

$$M(X) = n \cdot p .$$

Выполнив дифференцирование по переменной p ещё раз, и проделав аналогичные преобразования, получим формулу для дисперсии $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

<u>Пример.</u> Монета подбрасывается вверх 50 раз. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение, числа выпавших орлов.

<u>Решение:</u> В данном случае $p = 0{,}5$: $q = 0{,}5$; $n = 50$. Испытания независимы и вероятность появления орла в каждом испытании постоянна, поэтому, имеем биномиальный закон распределения. Воспользуемся формулами

$$M(X) = n \cdot p, \; D(X) = n \cdot p \cdot q;$$

получим,

$$M(X) = 50 \cdot 0{,}5 = 25; \; D(X) = 50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 12{,}5;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{12{,}5} = 5\sqrt{2}/2.$$

<u>Ответ:</u> $M(X) = 25$; $D(X) = 12{,}5$; $\sigma(X) = 5\sqrt{2}/2$.

3.7. Закон распределения Пуассона

<u>Определение</u> Распределение случайной величины X, принимающей значения $X = 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ с вероятностями $P(X = m) = \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, (где $\lambda > 0$ - некоторое число) называется **пуассоновским** распределением.

Закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона при малых значениях p и больших значениях n. При этом параметр $\lambda = n \cdot p$.

Приведём примеры случайной величины, имеющей распределение Пуассона:

1) Число вызовов на телефонной станции за некоторое время;
2) Число отказов сложной аппаратуры за малое время, если отказы независимы друг от друга.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределённой по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ в этом законе:

$$M(X) = \lambda,$$

$$D(X) = \lambda.$$

<u>Доказательство.</u> По определению

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Найдем вначале $M(X)$:

$$M(x) = \sum_{m=1}^{n} m \cdot \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \left(\sum_{\mathrm{m=1}}^{\mathrm{n}} \frac{\lambda^{\mathrm{m-1}}}{(m-1)!} \right) \cdot e^{-\lambda}$$

Если n растет, то

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \to e^{-\lambda}$$

Поэтому, $M(x) \to \lambda \cdot e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda}$

Можно считать, что при больших значениях n имеет место формула:

$$M(x) = \lambda$$

Найдем теперь $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \sum_{m=1}^{n} m^2 \cdot \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \left(\sum_{m=1}^{n} m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \right) \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \left(\sum_{m=1}^{n} (m-1) \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{n} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \right) \cdot e^{-\lambda} \approx$$

$$\approx \lambda (\lambda \cdot e^{\lambda} + e^{\lambda}) e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda,$$

если n большое число.

Можно считать, что $M(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

Найдем дисперсию

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

$$D(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие будет повреждено равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 повреждённых изделия.

Решение: В данном случае n = 5000, p = 0,0002. Применим формулу Пуассона, когда $m = 3$; $\lambda = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$.

По формуле Пуассона $P(X = 3) = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = 1/(6e) \approx 0{,}06$.

Ответ. 0,06.

Пример. На телефонной станции в течение определенного часа дня поступает в среднем 30 вызовов. Найти вероятность того, что в течение минуты поступает не более 2 вызовов.

Решение Число вызовов X на телефонной станции – случайная величина, распределенная по закону Пуассона. Математическое ожидание числа вызовов за минуту (среднее число вызовов) $M(X) = \lambda$. Поэтому, $\lambda = 30/60 = 0{,}5$. По условию необходимо найти вероятность того, что вызова не будет вообще ($X = 0$) или будет один вызов ($X = 1$), или будет два вызова ($X = 2$); поэтому

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).$$

По формуле Пуассона:

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-0{,}5};$$

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5};$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}5}/2;$$

Значит, $P = e^{-0{,}5} \cdot (1 + 0{,}5 + 0{,}125) \approx 0{,}98$.

Ответ: 0,98.

3.8. Геометрическое распределение

Определение. Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если она принимает значения $X = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m, \ldots\}$ с вероятностями

$$P(X = m) = p \cdot q^{m-1},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Случайная величина $X = m$, имеющая геометрическое распределение, представляет собой количество испытаний, проведенных в одинаковых условиях, с постоянной вероятностью p наступления в каждом испытании некоторого события, до тех пор, пока это событие не наступит. Например, при стрельбе из винтовки до первого попадания, количество выстрелов есть случайная величина, распределённая по геометрическому закону распределения.

Ряд распределения случайной случайной величины X имеет вид:

x_i	1	2	3	…	m	…
p_i	p	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	…	$p \cdot q^{m-1}$	…

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей распределение по геометрическому закону распределения,

$$M(X) = \frac{1}{p},$$

А её дисперсия

$$D(X) = \frac{q}{p^2},$$

где $q = 1 - p$.

Доказательство: Математическое ожидание равно сумме парных произведений элементов двух строк таблицы закона распределения; поэтому

$$M(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot p \cdot q + 3 \cdot p \cdot q^2 + \ldots + m \cdot p \cdot q^{m-1} + \ldots\ldots$$

Если вынести за скобки постоянный множитель p, то это равенство можно записать следующим образом

$$M(X) = p(q + q^2 + \ldots + q^m + \ldots)' = p \cdot \left(\frac{q}{1-q} \right)';$$

При этом была использована формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также то свойство, что данный степенной ряд можно почленно дифференцировать в области сходимости
$0 < q < 1$.

После нахождения производной, получим

$$M(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Аналогичным методом получают формулу для дисперсии.

Пример. Проводится проверка большой партии деталей до первого обнаружения бракованной. Найти математическое ожидание и дисперсию числа проверенных деталей, если вероятность брака для каждой детали равна 0,05.

Решение: Число проверенных деталей – случайная величина X, имеющая геометрическое распределение. Имеем, $p = 0{,}05$; $q = 0{,}95$.
Поэтому,

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}05} = 20; \; D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}95}{0{,}05^2} = 380.$$

Ответ: $M(X) = 20$, $D(X) = 380$.

3.9. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. (Математическое ожидание, дисперсия, мода и медиана)

Определение. **Математическое ожидание** $M(X)$ непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx,$$

где $f(x)$ - плотность распределения случайной величины X.

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то

$$M(X)=\int_{a}^{b}x\cdot f(x)dx.$$

Математическое ожидание $M(X)$ является средним значением случайной величины X.

Все свойства математического ожидания, рассмотренные выше для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Заметим, что если график кривой распределения $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = C$, то математическое ожидание $M(X) = C$.

Определение. **Модой** $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то её возможное значение $x = M_0(X)$, которому соответствует локальный максимум графика функции $y = f(x)$.

Определение. **Медианой** $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называют то её возможное значение $x = M_e(X)$, которое определяется равенством

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)).$$

Геометрически медиану можно интерпретировать как точку на оси OX, в которой прямая $x = M_e(X)$ делит пополам площадь, ограниченную графиком кривой $y = f(x)$ и осью OX или, другими словами, вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем $M_e(X)$ равна вероятности того, что случайная величина X примет значение большее, чем $M_e(X)$.

Определение. **Дисперсия** $D(X)$ непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси OX, определяется равенством

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2\cdot f(x)dx,$$

где $f(x)$ - плотность распределения случайной величины X. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x)\,dx.$$

Отметим, что дисперсию можно также вычислять по формуле

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)\,dx - (M(X))^2.$$

Все свойства дисперсии, рассмотренные выше для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных случайных величин.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X определяется также, как и для дискретной случайной величины

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример. Найти моду, медиану, математическое ожидание случайной величины X, которая задана плотностью распределения вероятности следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}75x^2 + 6x - 11{,}25, & \text{если } 3 \le x \le 5; \\ 0, & \text{для остальных значений x.} \end{cases}$$

Решение: Графиком функции $y = -0{,}75x^2 + 6x - 11{,}25$ является часть параболы, расположенной над осью OX; ветви которой направлены вниз; точками пересечения параболы с осью OX являются точки $x = 3$ и $x = 5$. При этом график плотности распределения $y = f(x)$ расположен симметрично относительно прямой $x = 4$, проходящей через вершину параболы (рис.6).

Значит, медиана равна

$M_e(X) = 4.$

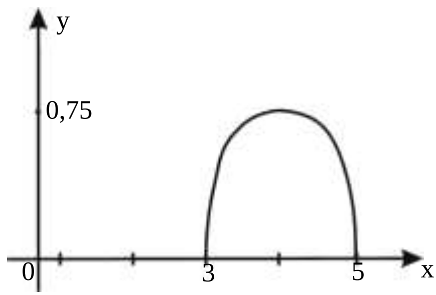

Рис.6

Вершина параболы – максимум кривой распределения, соответствует значению $x = 4$ ($\max f(x) = f(4)$); поэтому мода

$$M_o(X) = 4.$$

Математическое ожидание $M(X)$ совпадает с медианой потому, что график функции y = $f(x)$ симметричен
относительно прямой x = 4 и $M(X)$ = 4. Математическое ожидание $M(X)$ можно было также вычислить с помощью интеграла по формуле

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

$$M(X) = \int_3^5 x\left(-0{,}75x^2 + 6x - 11{,}25\right)dx = 4$$

<u>Ответ:</u> $M_o(X) = 4$; $M_e(X) = 4$; $M(X) = 4$.

<u>Пример.</u> Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана плотностью распределения вероятности следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}08x, & \text{если } 0 \le x \le 5; \\ 0 & \text{для остальных значений } x. \end{cases}$$

<u>Решение:</u> Найдём математическое ожидание X по формуле:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Будем иметь

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot 0{,}08x dx = 0{,}08 \cdot 125/3 = 10/3.$$

Найдём дисперсию по формуле:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Вычислим математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot 0{,}08x dx = 0{,}08 \cdot 625/4 = 25/2,$$

значит,

$$D(X) = 25/2 - 100/9 = 25/18;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{25/18} = 5\sqrt{2}/4.$$

Ответ: $D(X) = 25/18$; $\sigma(X) = 5\sqrt{2}/4$.