# Глава 3. Случайные величины

## 3.1. Понятие случайной величины.

Определение. Случайной величиной называют величину, которая в результате опыта может принять то или иное (но только одно) значение, причём заранее, до опыта, неизвестно, которое.

Примеры случайных величин:

1) количество дождливых дней в июле месяце;

2) количество неудовлетворительных оценок на экзамене;

3) скорость ветра в данный момент времени.

Определение. Дискретными называются такие случайные величины, значения которых могут быть пронумерованы.

Определение. Непрерывными называются такие случайные величины, значения, которых заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Так, в приведенных выше примерах 1 - 2 имеем дискретные случайные величины, а в примере 3 - непрерывную случайную величину.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами латинского алфавита $X$, $Y$, $Z$ … , а значения, которые оно принимают - строчными буквами $x$, $y$, $z$…

## 3.2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Определение. Законом распределения дискретной случайной величины называют всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины $X$ может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой записывают возможные значения случайные величины $X = x_i$, а во второй – соответствующие вероятности $P(X = x_i) = p_i$.

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

Такая таблица называется рядом распределения. При этом всегда должно выполняться условие $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (сумма элементов второй строки равна единице). Если множество значений случайной величины $X$ бесконечно (счётное множество), то ряд

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$$

должен сходиться и его сумма равна единице.

Закон распределения может быть изображён графически, если по оси *OX* откладывать значения случайной величины $x_i$, а по оси *OY* соответствующие вероятности $p_i$. Соединив эти точки отрезками, получим ломаную линию, которая называется многоугольником или полигоном вероятностей.

Пример Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов и построить многоугольник распределения.

Решение. Пусть *X* дискретная случайная величина - число отказавших элементов. Возможные значения *X*: $x_1 = 0$ (ни один из элементов не отказал); $x_2 = 1$ (отказал один из элементов ); $x_3 = 2$ (отказали два элемента); $x_4 = 3$ (отказали все три элемента ).

Отказы элементов независимы друг от друга, вероятности отказов каждого из элементов одинаковы, поэтому можно применить Формулу Бернулли

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,n}} = C_n^m \cdot p^{\mathrm{m}} \cdot q^{\,\mathrm{n-m}}.$$

В нашем случае $p = 0,1$; $q = 0,9$; $n = 3$; значения $m$ нужно брать равными 0; 1; 2 или 3. По формуле Бернулли получим:

$$P(X = x_1) = \boldsymbol{P}_{\mathbf{0,3}} = q^3 = 0,9^3 = 0,729;$$

$$P(X = x_2) = \boldsymbol{P}_{\mathbf{1,3}} = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243;$$

$$P(X = x_3) = \boldsymbol{P}_{\mathbf{2,3}} = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027;$$

$$P(X = x_4) = \boldsymbol{P}_{\mathbf{3,3}} = p^3 = 0,1^3 = 0,001;$$

Закон распределения числа отказавших элементов запишем в виде таблицы

| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| *P* | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

Для контроля вычислений проверим, что сумма вероятностей равна единице, действительно,

$$0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 + 0{,}001 = 1.$$

Построим прямоугольную систему координат, причем на оси $OX$ будем откладывать возможные значения $x_i$, а по оси ординат – соответствующие вероятности $P_i$. Построим точки $M_1$ (0;0,723), $M_2$ (1;0,243), $M_3$ (2; 0,027), $M_4$ (3;0,001). Соединим эти точки отрезками прямых, получим многоугольник распределения (рис.2).

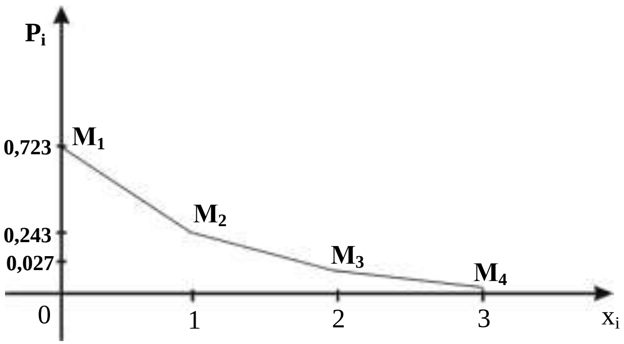


Рис 2. Многоугольник распределения

Ответ:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P$ | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

### 3.3. Функция распределения

Определение. Функцией распределения (интегральной функцией распределения) случайной величины $X$ называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения $x$ вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x) = P\,(X < x).$$

Геометрически функция $F(x)$ определяет вероятность того, что случайная точка $X$ в результате опыта попадает левее заданной точки $x$.(рис.3).

Функция распределения обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Значения функции $F(x)$ заключены между нулём и единицей:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2. Функции $F(x)$ есть неубывающая функция:

$F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_{1.}$

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, заключённое в интервале $(\alpha, \beta)$ равна приращению функции $F(x)$ на этом интервале:.

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина $X$ примет одно определённое значение, например $\alpha$ равна нулю:

$$P(X = \alpha) = 0.$$

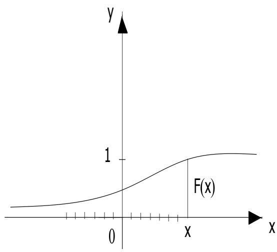


Рис.3. Функция распределения

<u>Свойство 3.</u> Если все возможные значения случайной величины $X$ принадлежат только интервалу $(\alpha, \beta)$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \alpha \\ 1, & \text{при } x \geq \beta \end{cases}$$

Следствие 4. Справедливы следующие предельные соотношения

$$F(-\infty) = 0;$$

$$F(+\infty) = 1.$$

<u>Свойство 4.</u> Для дискретной случайной величины значение $F(x)$ равно сумме вероятностей $P(X = x_{\mathrm{i}})$ для всех значений $x_{\mathrm{i}}$, которые меньше $x$,

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

<u>Пример:</u> Дан ряд распределения случайной величины $X$:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

Найти и изобразить графически её функцию распределения $F(x)$.

<u>Решение:</u> Случайная величина $X$ является дискретной, поэтому $F(x)$ будет «ступенчатой» функцией; найдём значения $F(x)$:

1) По свойству 3, если $x \le 0$, то $F(x) = 0$, в том числе и при $x = 0$ ($F(0) = P(x < 0) = 0$ ).

2) При $0 < x \le 1$, имеем, $F(x) = P(X = 0) = 0{,}729$.

3) При $1 < x \le 2$, имеем $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}729 + 0{,}243 = 0{,}972$.

4) При $2 < x \le 3$, имеем $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}729 + 0.243 + 0{,}027 = 0{,}999$.

5) При $x > 3$, имеем, (по свойству 3) $F(x) = 1$.

$$\text{Итак, } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 0{,}729, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}972 & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}999, & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Изобразим $F(x)$ графически (функция является непрерывной слева)

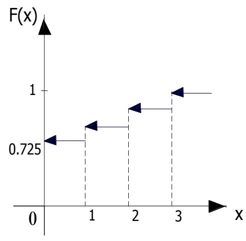


Рис.4. Функция распределения

<u>Замечание:</u> График функции распределения любой дискретной случайной величины является разрывной ступенчатой функцией, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины $X = x_i$ и равны вероятностям этих значений $P(x_i)$.

Пример: Функция распределения непрерывной случайной величины *X* имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ x-1, & \text{если } 1 \le x \le 2, \\ 1, & \text{если } 2 \le x. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение, заключённое в интервале (1,5; 2,5).

Решение: Вероятность того, что величина *X* примет значение, заключённое в интервале (1,5; 2,5) , равна

$$P(1{,}5 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5).$$

По условию, $F(2{,}5) = 1$; $F(1{,}5) = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$.

Значит,

$$P(1{,}5 < X < 2{,}5) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Ответ:0,5.

### 3.4. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Если случайная величина *X* является непрерывной, то будем рассматривать только такие функции распределения $y = F(x)$, которые являются непрерывными и дифференцируемыми всюду, за исключением, быть может, отдельных точек. Введём понятие плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины. Рассмотрим вероятность попадания случайной величины *X* на промежуток $(x;\ x + \Delta x)$. По свойству 1 функции распределения, вероятность равна приращению функции распределения

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Разделим обе части этого соотношения на $\Delta x$. Известно, что отношение приращения функции к приращению аргумента при малых значениях $\Delta x$ приближённо равно производной от функции. Таким образом,

$$F'(x) \approx \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x};$$

Таким образом, производная от функции распределения приближённо равна средней вероятности.

<u>Определение:</u> Плотностью распределения вероятности (дифференциальной функцией) непрерывной случайной величины называют первую производную от её функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

График плотности вероятности (рис.5) называется кривой распределения.

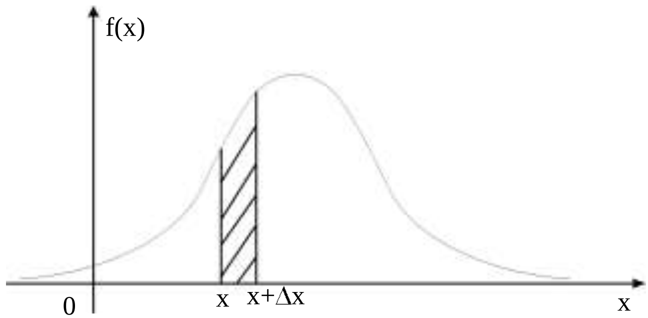


Рис.5. Плотность распределения