Раздел 1. Теория вероятностей

Глава 1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

1.1. Случайные события. Классификация событий

Определение. Событием в теории вероятности называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате некоторого опыта (испытания). События будем в дальнейшем обозначать прописными буквами (может быть с индексами).

Определение. Испытание – это эксперимент (опыт), который можно повторять сколько угодно раз, соблюдая некоторый стабильный комплекс условий, (например, при выстреле из винтовки: испытание – выстрел, событие А – попадание в цель).

Определение. Событие A называется достоверным, если оно наступает при всех испытаниях (например, событие A - при подбрасывании монеты она упадёт на поверхность земли является достоверным).

Определение. Событие A называется невозможным A, если оно никогда не наступает при всех опытах (например, событие A - в январе в Белгороде в саду зацвели розы является невозможным).

Определение. Событие называется возможным, если оно может появиться, а может и не появиться (например, попадание в цель при выстреле).

Определение. События называется равновозможными, если условия их появления одинаковы (например, события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 равновозможные события: при подбрасывании игральной кости (кубика) на верхней части кубика выпадают цифры 1,2,3,4,5,6).

Определение. События называются совместными, если появление одного из них не исключает появление другого (например, при подбрасывании двух игральных костей на первой кости выпадет три очка, а на второй два очка).

Определение. События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого (например, события A_1, A_2 являются несовместными событиями, если при бросании кубика событие A_1 состоит в том, что на верхней грани появится чётное число очков, а событие A_2 состоит в том, что на верхней грани появится нечётное число очков).

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются группой несовместных событий, если события, входящие в группу попарно несовместны, (например, события A_1, A_2 образуют группу несовместных событий, если при одном выстреле из винтовки: A_1 – попадание в десятку, A_2 –непопадание в мишень) .

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются группой совместных событий, если совместны хотя бы два события из этой группы (например, события A_1, A_2, A_3 образуют группу совместных событий, если при трёх выстрелах из винтовки: A_1– попадание при первом выстреле, A_2 – попадание при втором выстреле, A_3 – попадание при третьем выстреле) .

Определение. События образуют полную группу, если в результате опыта обязательно наступает хотя бы одно из них (например, события A_1 и A_2 образуют полную группу, если при бросании монеты событие A_1 - выпадет орёл, событие A_2 -выпадет цифра).

1.2. Сумма и произведение событий

Определение. Суммой или объединением нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие S, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий; обозначают сумму событий так:

$$S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Например, событие $S = A_1 + A_2$ (попадание в цель при каком либо из двух выстрелов, если A_1– попадание при первом выстреле, A_2 – попадание при втором выстреле).

Определение. Произведением или совмещением нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие P, состоящее в совместном появлении всех этих событий; обозначают произведение событий так:

$$P = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

Например, событие $P = A_1 \cdot A_2$ (попадание в цель при обоих выстрелах, если A_1– попадание при первом выстреле, A_2 – попадание при втором выстреле).

1.3. Сложные события

Определение. Сложные события - это комбинация более простых событий.

Например, при двух выстрелах, если A_1 – попадание при первом выстреле, $\overline{A_1}$ - промах при первом выстреле, A_2 – попадание при втором выстреле, $\overline{A_2}$ - промах при втором выстреле, то событие B – только одно попадание при двух выстрелах можно записать с помощью простых событий

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} + A_2 \cdot \overline{A_1}.$$

1.4. Частота события. Статистическое определение вероятности

Пусть выполняется серия опытов, в каждом из которых может наступить или не появиться событие A. Пусть m - число испытаний, в которых событие A произошло; n- общее число испытаний.

Определение. Частотой события A называют отношение

$$P^*(A)=\frac{m}{n}.$$

Например, если из партии деталей выбрано 100 изделий, среди которых оказалось три бракованных, то частота события A, извлечь бракованную деталь, $P^*(A) = 3/100$.

Свойства частоты:

1) $0 \le P^*(A) \le 1$;
2) $P^*(A) = 1$, если A – достоверное событие;
3) $P^*(A) = 0$, если A – невозможное событие;
4) $P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B)$, если A и B - несовместные события;
5) $P^*(A{\cdot}B) = P^*(A){\cdot}P^*(B|A) = P^*(B){\cdot}P^*(A|B)$, если A и B совместные события. Здесь $P^*(B|A)$ – условная частота события B при условии, что событие A наступило.

Определение. Статистической вероятностью $P(A)$ случайного события A называется постоянное число, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний.

Например, $P(A) = 0{,}5$,если событие A – выпадение орла при бросании монеты.

1.5. Классический способ определения вероятностей

Будем рассматривать несовместные и равновозможные события, которые образуют полную группу (так называемая схема урн). Например, события O (выпал орёл) и событие C (выпала цифра) при бросании монеты; или события A_1, A_2,…, A_6 при бросании игральной кости (выпало число очков соответственно равное числу 1, 2,…,6).

Определение. Классической вероятностью появления некоторого события A называется отношение числа случаев m, благоприятствующих появлению этого события, к общему числу n равновозможных в данном опыте случаев, т.е.,

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Например, вероятность выпадения чётного числа на верхней грани при выбрасывании кубика равна $P = \frac{3}{6}$. Благоприятных исходов $m = 3$ (выпадение чисел 2, 4 ,6); общих исходов $n = 6$ (выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6).

1.6. Основные формулы комбинаторики

Определение. Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же элементов, которые отличаются только порядком их расположения.

Число перестановок P_n из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

Например, буквы *М, А, К* можно переставить шестью способами :*МАК, МКА*, *КМА*, *КАМ, АМК, АКМ* (число перестановок $P_3 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$).

Определение. Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число размещений из n элементов по m элементов вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

На практике удобнее пользоваться другой формулой:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

Например, размещениями из четырёх элементов a,b,c,d по два элемента являются комбинации *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, *ba*, *cd*, *da*, *cb*, *db*, *dc*. При этом число размещений $A_4^2 = 4\cdot 3 = 12$.

Определение. Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по *m* элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число C_n^m сочетаний из *n* элементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

При вычислениях удобнее пользоваться другой формулой

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Например, сочетаниями из пяти элементов *a*, *b*, *c*, *d*, *e* по три элемента являются комбинации *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*. При этом число сочетаний равно:

$$C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Пример На карточках имеются буквы А, А, О, С, Т, Т, Ч расположенные в произвольном порядке. Какова вероятность, что при произвольном вытаскивании карточек будет получено слово ЧАСТОТА?

Решение. Вероятность найдём по классической формуле теории вероятностей. Буквы А и Т в слове ЧАСТОТА встречаются по два раза, поэтому число благоприятных исходов $m = (2!)\cdot(2!) = 4$, а общее число перестановок букв $n = 7! = 5040$. Значит, $p = 4/5040 = 1/1260$.

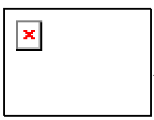
Ответ. $P = 1/1260$.

Пример В приборе имеется 11 деталей, из них 3 неисправных. Случайным образом выбирают 5 деталей. Какова вероятность, что среди проверенных деталей окажутся неисправными 2 детали?

Решение: Вычислим общее количество комбинаций из 11 деталей по 5 деталей: $n = C_{11}^5 = 462$, а количество благоприятных случаев равно $m = C_3^2 \cdot C_8^3$. Действительно, $m = m_1 \cdot m_2$, где m_1 - количество способов выбрать из 8 исправных деталей 3 детали, а m_2 - количество способов выбрать из 3 неисправных деталей 2 детали. Имеем:

$$m_1 = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56; \; m_2 = C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3;$$

Значит, $m = 3 \cdot 56 = 168$. В результате получим



; $$p = \frac{168}{462} = \frac{4}{11}$$

Ответ. $P = 4/11$.

Пример В лифт восьмиэтажного дома вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная с третьего. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение: Всего с третьего по восьмой – шесть этажей. Поэтому, общее количество возможных исходов $n = 6^3$ (каждый из пассажиров может выйти на любом из шести этажей). Количество благоприятных случаев совпадает с числом размещений из шести элементов по три элемента, т.е. $m = A_6^3$.

Поэтому, $p = \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Ответ. 5/9.

1.7. Геометрическое определение вероятности

Пусть в некотором пространстве область d содержится внутри области D.

Определение. Геометрическая вероятность попадания некоторой точки в область d, содержащейся в области D, равна отношению размера этой области S_d к размеру всей области S_D, в которой может появляться данная точка (и не зависит от расположения и формы области d),т.е.

$$P = \frac{S_d}{S_D}.$$

Пример. (Задача о встрече). Два приятеля договорились о встрече, которая должна произойти в определённом месте в любой момент промежутка времени T. Определить вероятность встречи, если моменты прихода каждого приятеля независимы и время ожидания одним другого не больше τ.

Решение. Пусть x и y время прихода первого и второго приятелей соответственно; при этом должны выполняться условия:

$$0 \le x \le T,\ 0 \le y \le T.$$

Введём в рассмотрение прямоугольную систему координат xOy.

В этой системе двойным неравенствам $0 \le x \le T$, $0 \le y \le T$ удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OTAT$.

Чтобы встреча состоялась, должно выполняться условие $|x - y| < \tau$. Геометрически эти точки соответствуют заштрихованной области квадрата (область d) на рис.1. Площадь заштрихованной области можно вычислить по формуле $S_d = T^2 - (T - \tau)^2$. Площадь всего квадрата (площадь области D) равна $S_D = T^2$.

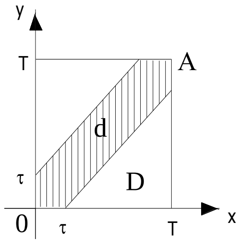


Рис.1

Вероятность того, что точка (x, y) принадлежит заштрихованной области, вычислим по формуле

$$P = \frac{S_d}{S_D}.$$

В результате получим

$$P = (T^2 - (T - \tau)^2)/ T^2.$$

Ответ. $P = 1 - (1 - \tau/ T)^2$.

1.8. Аксиоматическое построение теории вероятности

Аксиомы теории вероятностей вводятся таким образом, чтобы вероятность события согласовывалась с основными свойствами частоты.

Аксиома 1. Вероятность случайного события A есть неотрицательное число, не превышающее единицы, т.е.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Аксиома 2. Вероятность достоверного события Ω равна единице, т.е.

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксиома 3. Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна нулю, т.е.

$$P(\varnothing) = 0.$$

Аксиома 4. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Определение. Вероятность наступления события A, вычисленная при условии наступления другого события B называется условной вероятностью события A по отношению к событию B и обозначается $P(A \mid B)$.

Аксиома 5. Вероятность произведения (совмещения двух событий) равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого события, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

1.9. Теорема сложения вероятностей

Теорема. Вероятность появления одного из нескольких несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \cdot \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n).$$

(при доказательстве используется аксиома 4 и метод математической индукции).

Пример. В урне содержится 15 синих, 10 красных и 5 белых шаров. Найти вероятность того, что при вытаскивании одного шара из урны будет вынут красный или белый шар.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что при вытаскивании шара из урны будет вынут красный шар; событие B состоит в том, что при вытаскивании шара из урны будет вынут белый шар; событие C состоит в том, что при вытаскивании шара из урны будет вынут красный или белый шар. Значит, $C = A + B$. При этом

$$P(A) = 10/30 = 1/3; \qquad P(B) = 5/30 = 1/6.$$

События A и B несовместны; значит, по теореме сложения вероятностей

$$P(C) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6, \text{ т.е. } P(C) = 1/2.$$

Ответ. $P = 1/2$.

Аксиома 6. Вероятность суммы бесконечно большого числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Следствие 1. Если A_1, A_2,…, $A_п$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1.$$

Следствие 2 Сумма вероятности противоположных событий равна единице, т.е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример. В партии 20 изделий, из которых 6 бракованных; проверяется 6 деталей, выбранных случайным образом. Найти вероятность того, что бракованных среди них окажется больше двух.

Решение. Пусть A_0 - событие, состоящее в том, что среди выбранных 6 изделий нет ни одного бракованного;

A_1 - событие, состоящее в том, что браковано только одно изделие среди выбранных 6 изделий;

A_2 - событие, состоящее в том, что среди выбранных 6 изделий, два изделия бракованные;

C - событие, состоящее в том, что среди выбранных 6 изделий бракованных изделий не больше двух.

D - событие, состоящее в том, что среди выбранных 6 изделий бракованных изделий больше двух.

События A_0, A_1, A_2 являются несовместными событиями; поэтому,

$$C = A_0 + A_1 + A_2.$$

Значит,

$$P(C) = P(A_0 + A_1 + A_2) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2),$$

где

$$P(A_0)=\frac{C_{14}^6}{C_{20}^6};\quad P(A_1)=\frac{C_{14}^5\cdot C_6^1}{C_{20}^6};\qquad P(A_2)=\frac{C_{14}^4\cdot C_6^2}{C_{20}^6}.$$

Событие D является противоположным событию C, поэтому, искомая вероятность

$$P(D) = 1 - P(C).$$

В результате вычислений получим

$$P(A_0)=\frac{3003}{38760}=0{,}075;\ P(A_1)=\frac{2002\cdot 6}{38760}=0{,}30991;$$

$$P(A_2)=\frac{1001\cdot 15}{38760}=0{,}3874.$$

Значит, $P(C) = 0{,}0775 + 0{,}3874 + 0{,}30991 = 0{,}7748$

Тогда $P(D) = 1 – 0{,}7748 = 0{,}2252$.

Ответ. 0,2252.

1.10. Теорема умножения вероятностей

Определение. Событие A называют независимым по отношению к событию B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. В противном случае событие A называют зависимым от события B.

Другое определение. Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого.

Теорема. Вероятность произведения (совместного) наступления нескольких событий, равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности других событий, вычисленных в предположении, что все предшествующие события имели место:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|\,A_1)\cdot P(A_3|\,A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|\,A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$$

(при доказательстве используется аксиома 5 и метод математической индукции).

Следствие. Для независимых событий вероятность их совместного наступления равна:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример. На 2-х станках изготавливаются одинаковые детали; при этом производительность первого станка в два раза выше производительности второго станка, а доли деталей высшего качества, изготовленных на первом и втором станках, соответственно равны 0,96 и 0,94. Не рассортированные детали находятся на складе. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь изготовлена на первом станке и окажется высшего качества.

Решение: Пусть событие A состоит в том, что взятая наудачу деталь изготовлена на первом станке; событие B состоит в том, что взятая деталь окажется высшего качества; событие C состоит в том, что взятая наудачу деталь изготовлена на первом станке и окажется высшего качества. Тогда,

$$C = A \cdot B.$$

Вероятность события $P(A) = 2/3$, а условная вероятность $P(B|A) = 0,96$. Поэтому, по теореме умножения вероятностей

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

В результате, получим

$$P(C) = 2 \cdot 0,96/3 = 0,64.$$

Ответ: $P = 0,64$.

Пример. У сборщика 15 деталей, из них 5 нестандартных. Для сборки механизма он должен выбрать 3 детали. Механизм не будет работать, если все 3 детали нестандартные и будет работать, если нестандартных деталей только одна или две. Найти вероятность того, что механизм не будет работать.

Решение. Механизм не будет работать, если все 3 детали будут нестандартными. Пусть события A_1, A_2, A_3, состоят в том, что соответственно, первая, вторая и третья деталь будут нестандартными. Пусть событие A состоит в том, что механизм не будет работать. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Вероятность события А найдём по формуле умножения вероятностей

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|\, A_1 \cdot A_2)$$

В результате, получим

$$P(A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \approx 0.011.$$

Ответ: $P(A) = 0,011$.

1.11. Теорема сложения вероятностей для совместных событий

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятности появления этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

(без доказательства).

Пример. Рабочий обслуживает два станка. Вероятность того, что в течении часа первый станок будет работать без сбоя равна 0.9; для второго станка эта вероятность равна 0.8. Какова вероятность, что без сбоя будет работать хотя бы один станок?

Решение. Первый способ. Пусть A_1, A_2 события, состоящие в том, что соответственно первый и второй станок будут работать без сбоя. Тогда вероятность того, что без сбоя будет работать хотя бы один станок, равна вероятности суммы этих событий; по формуле получим

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Значит,

$$P(A_1 + A_2) = 0.9 + 0.8 - 0.9 \cdot 0.8 = 0.98.$$

Второй способ. Пусть событие $A = A_1 + A_2$ - без сбоя будет работать хотя бы один из двух станков. Найдём вероятность этого события с помощью вероятности противоположного события $\overline{A}$ (оба станка будут работать со сбоями). Тогда,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 1 - 0.1 \cdot 0.2 = 0.98$$

Третий способ. Представим сложное событие $A = A_1 + A_2$ в виде суммы трёх несовместных событий $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2 + A_1 A_2$.

Тогда,

$$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}18 + 0{,}08 + 0{,}72 = 0{,}98.$$

Ответ: 0,98.

1.12. Формула полной вероятности

Пусть событие A наступает вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, причем $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образуют полную группу событий. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ будем называть <u>гипотезами</u>. Пусть известны также вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности события $P(A|H_i)$, для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

<u>Теорема</u> . Если событие A может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующие условные вероятности события A, т.е.

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n).$$

<u>Доказательство</u> По условию события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, а событие A может произойти только одновременно с одним из событий H_i, поэтому,

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A.$$

Применим теорему сложения для несовместных событий:

$$P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \ldots + P(H_n \cdot A).$$

По теореме умножения:

$$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i),$$

откуда и получим формулу

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n).$$

<u>Пример.</u> В цехе работает три типа станков с одинаковой производительностью. Данные о станках приведены в следующей таблице:

Тип станка	Количество станков	Доля деталей отличного качества, произведенных на станке
1	5	0,94
2	3	0,9
3	2	0,85

Произведенные детали лежат на складе не рассортированными. Определить вероятность того, что взятая случайным образом деталь окажется деталью отличного качества.

Решение. Обозначим события - гипотезы:

H_1, H_2, H_3 - (взятая деталь изготовлена соответственно на первом, втором и третьем станке);

A - взятая деталь отличного качества.

По условию

$$P(H_1) = 5/10 = 0{,}5; \qquad P(A|H_1) = 0{,}94.$$

$$P(H_2) = 3/10 = 0{,}3; \qquad P(A|H_2) = 0{,}9.$$

$$P(H_3) = 2/10 = 0{,}2; \qquad P(A|H_3) = 0{,}85.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3)$$

Получим

$$P(A) = 0{,}5\cdot 0{,}94 + 0{,}3\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}85 = 0{,}91.$$

Ответ: 0,91.

1.13. Теорема гипотез (формула Бейеса)

Теорема. Имеется полная группа несовместных гипотез H_1, H_2,…, H_n и событие A произошло одновременно с одной из этих гипотез. Тогда условную вероятность $P(H_i|A)$ можно найти по формуле Байеса:

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A|H_n)}.$$

Доказательство: По свойству произведения событий $H_i\cdot A = A\cdot H_i$, поэтому, $P(H_i\cdot A) = P(A\cdot H_i)$, значит, по теореме умножения вероятностей,

$$P(H_i)\cdot P(A|H_i)= P(A)\cdot P(H_i|A).$$

Заменим в этом равенстве вероятность $P(A)$ по формуле полной вероятности и выразим затем из полученного выражения условную вероятность $P(H_i|A)$; в результате получим формулу Байеса:

$$P(Hi|A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)+\ldots+P(H_n)\cdot P(A|H_n)}$$

Пример В трех одинаковых ящиках находятся однотипные детали, среди которых имеются бракованные. Данные о деталях приведены в следующей таблице:

Номер ящика	Кол-во деталей	Количество бракованных деталей
1	10	3
2	15	5
3	20	6

Взятая наудачу деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что взятая деталь принадлежала второму ящику?

Решение: Обозначим события:

A – выбранная деталь бракованная;

H_1, H_2, H_3 - (гипотезы) деталь принадлежит соответственно первому, второму, третьему ящику.

Тогда, по условию

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3.$$

Кроме того, имеем также:

$$P(A\,|H_1) = 3/10; \quad P(A|H_2) = 5/15; \qquad P(A|H_3) = 6/20.$$

По формуле Байеса,

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\right)} = \frac{5}{14}.$$

Ответ: 5/14.

Глава 2. Повторные независимые испытания

2.1. Формула Бернулли

Пусть проводятся независимые испытания при стабильном комплексе условий, в результате каждого испытания может наступить событие A с одинаковой вероятностью $P(A) = p$. При этом часто необходимо определить вероятность того, что в результате проведения n таких испытаний событие A наступит ровно m раз.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях, равна

$$P_{m,n} = \cdot C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

Эта формула называется формулой Бернулли (без доказательства).

Пример. Вероятность изготовления стандартной детали на станке равна 0,9. Найти вероятности возможного числа получения стандартных деталей среди пяти деталей, изготовленных на станке.

Решение. Вероятность изготовления стандартной детали на станке равна p = 0,9. Тогда вероятность изготовления бракованной детали равна 0,1. Количество стандартных деталей m среди пяти деталей, изготовленных на станке может быть равным m = 0,1,2,3,4,5. Искомые вероятности найдём по формуле Бернулли при n = 5; m = 0,1,2,3,4,5. Результаты вычислений $\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,5}}$ представлены в таблице

m	Формулы	$\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,5}}$
0	$C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^5$	1·1·0,00001 = 0,00001
1	$C_5^1 \cdot p^1 \cdot q^4$	5·0,9·0,0001 = 0,00045
2	$C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3$	10·0,81·0,001 = 0,0081
3	$C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2$	10·0,729·0,01 = 0,0729
4	$C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1$	5·0,6561·0,1 = 0,3285
5	$C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0$	1·0,59049·1 = 0,59049

Контроль вычислений: сумма вероятностей равна единице

$$\left(\sum_{m=0}^{5} P_{m5} = 1\right).$$

Пример. Среднестатистические данные показывают, что вероятность того, что будет ясная погода в какой-либо день июня равна p = 0,75. Найти вероятность того, что в последующие 6 дней, в течение 4 дней будет ясная погода.

Решение. По условию p = 0,75; тогда $q = 1 - p = 0{,}25$. Вероятность $P_{4,6}$ найдём по формуле Бернулли

$$P_{4,6} = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2.$$

Значит, $P_{4,6} = 15 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}2966$

Ответ: 0,2966.

2.2. Производящая функция

Формула Бернулли применяется, если в каждом из n испытаний может наступить событие A с одинаковой вероятностью $P(A) = p$. Рассмотрим теперь испытания, в которых вероятности появления события A в каждом испытании различны.

Пусть производится серия из n независимых испытаний, причём в первом испытании вероятность появления события A равна p_1, во втором испытании вероятность равна $p_2,\ldots$, в n - ом испытании – p_n. Вероятности не появления события A в этих испытаниях соответственно равны q_1, $q_2,\ldots$, q_n, где $q_i = 1 - p_i$.

Производящей функцией вероятностей $P_{m,n}$ называют многочлен степени n вида

$$\varphi_n(x) = (q_1 + p_1x)(q_2 + p_2x) + \cdots + (q_n + p_nx)\,.$$

Если раскрыть скобки, то коэффициенты при неизвестных x^m будут равны соответствующим вероятностям $\boldsymbol{P}_{\mathbf{mn}}$ (для всех значений $m = 0, 1, 2,\ldots,n$). Например, коэффициент при x будет равен вероятности $\boldsymbol{P}_{\mathbf{1,n}}$ появления события A только один раз в n испытаниях; коэффициент при x^2 будет равен вероятности $P_{2,n}$ появления события A два раза в n испытаниях и т.д. Таким образом

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} P_{mn}x^m$$

Пример. Четыре стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу по общей мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,6 и для четвертого – 0,5. Найти вероятность того, что в мишени будет равно две пробоины.

Решение: Вероятности попадания соответственно равны $p_1 = 0{,}8$; $p_2 = 0{,}7$; $p_3 = 0{,}6$; $p_4 = 0{,}5$, поэтому, вероятности того, что стрелки не попадут в мишень, равны $q_1 = 0{,}2$; $q_2 = 0{,}3$; $q_3 = 0{,}4$; $q_4 = 0{,}5$. Составим производящую функцию:

$$\varphi_4(x) = (0{,}2 + 0{,}8x)\,(0{,}3 + 0{,}7x)\,(0{,}4 + 0{,}6x)\,(0{,}5 + 0{,}5x).$$

После перемножения выражений в скобках и преобразований, получим многочлен четвёртой степени

$$\varphi_4(x) = 0{,}012 + 0{,}106x + 0{,}32x^2 + 0{,}394x^3 + 0{,}168x^4.$$

Коэффициент при x^2 равен P_{24} = 0,32, поэтому искомая вероятность равна 0,32.

Ответ: 0,32.

2.3. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Пусть вероятность p наступления события A в каждом из испытаний постоянна и выполняются n независимых испытаний.

Определение. Наивероятнейшим числом появления события A в этих испытаниях называют число $m = m_0$, для которого $\boldsymbol{P}_{m0,n}$ превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных исходов испытаний, т.е. выполняются неравенства $\boldsymbol{P}_{m0,n} \geq \boldsymbol{P}_{m,n}$ для всех значений $m \neq m_0$.

Известно, что значение m_0 должно удовлетворять двойному неравенству

$$np - q \leq m_0 < np + p,$$

причем:

а) если число $np - q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число m_0;

б) если число $np - q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно m_0 и $m_0 + 1$;

б) если число np – целое, то наивероятнейшее число $m_0 = np$.

При этом, решением этого неравенства может быть одно или два числа.

Пример: При данном технологическом процессе 85% всей произведенной продукции высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 150 изделий.

Решение: По условию p = 0,85, n=150; q = 0,15; найдём m_0 из неравенств

$$150 \cdot 0{,}85 - 0{,}15 \leq m_0 < 150 \cdot 0{,}85 - 0{,}85.$$

Значит,

$$127{,}35 \leq m_0 < 128{,}35.$$

Единственное целое число, удовлетворяющее полученному неравенству, m_0 = 128.

Ответ: 128.

Пример: Определить наиболее вероятное число бракованных изделий из 13 изготовленных, если вероятность изготовить бракованное изделие равна 4/7.

Решение: По условию n = 13, p = 4/7; q = 3/7; найдём m_0 из неравенств

$$13\cdot\frac{4}{7}-\frac{3}{7}\le m_0<13\cdot\frac{4}{7}+\frac{4}{7},$$

так как $np-q=7$ целое число, то наивероятнейших чисел два $m_0=7$ и $m_0+1=8$.

Ответ: 7 или 8.

2.4. Формула Пуассона

Если вероятность р наступления события A в каждом испытании есть малое число, а число испытаний n - велико, то формула Бернулли становится громоздкой и непригодна для вычислений. В этом случае вычисления выполняют по приближенной формуле Пуассона.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p\to0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n\to\infty$), причём произведение np стремится к постоянному числу λ ($np\to\lambda$), то вероятность $\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,n}}$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет приближённому равенству

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,n}}\approx\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda=n\cdot p$.

Эта формула называется формулой Пуассона

Доказательство. По формуле Бернулли

$$P_{mn}=C_{\text{n}}^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}.$$

Так как $p=\lambda/n$, то эту формулу можно записать так

$$P_{nm}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots m}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}\ldots\frac{(n-m+1)}{\text{n}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}\cdot\frac{m-n}{n}\cdot\lambda}$$

Пусть $n\to\infty$, тогда

$$\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}\cdots\frac{(n-m+1)}{\mathrm{n}}\to 1$$

(конечное число сомножителей, каждый из которых стремится к единице).

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\to e\,,\qquad\qquad \frac{m-n}{n}\cdot\lambda\to-\lambda\,,$$

значит, при больших значениях *n* имеем приближенную формулу

$$P_{mn}\approx\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}\,.$$

Пример: На факультете насчитывается 1606 студентов. Какова вероятность того, что 23 апреля является днём рождения одновременно 5 студентов?

Решение: Применим формулу Пуассона потому, что вероятность p = 1/365 - мала, а число n = 1606 - велико. Вычислим $\lambda = np$; λ = 1606/365 =4,4. Положим в формуле Пуассона $m = 5$, λ = 4,4; в результате получим

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{5,1606}}\approx\frac{4{,}4^5}{5!}\cdot e^{-4{,}4}=\frac{1649.16}{120}\cdot 0.0123\ = 0{,}169.$$

Ответ: 0,169.

2.5. Локальная теорема Муавра – Лапласа

Формула Бернулли $\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,n}} = C_n^m \cdot p^{\mathrm{m}}\cdot q^{\mathrm{n-m}}$ неудобна при больших значениях n; поэтому, вероятность $\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,n}}$ в этом случае вычисляют по приближенной формуле.

Теорема (локальная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,n}}$ того, что событие *A* произойдёт *m* раз в *n* независимых испытаниях при достаточно больших значениях *n*, приближённо равна

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{m,n}}\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\,,$$

где

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

(без доказательства).

Локальную теорему Муавра-Лапласа применяют, если выполнено условие $n \cdot p \cdot q \geq 20$.

Значения функции $\varphi(x)$ можно вычислить на калькуляторе или найти с помощью таблицы, приведенной в Приложении 1. При этом следует иметь в виду, что $\varphi(x)$ чётная функция, значит, $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Можно также считать, что, если $x > 4$, то $\varphi(x) = 0$.

Пример Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты орёл выпадет ровно 60 раз.

Решение. Имеем $n = 100$; $p = 0{,}5$; $q = 0{,}5$. Условие $n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 25 \geq 20$ выполнено. Применим формулу Муавра-Лапласа

$$P_{60,100} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \cdot \varphi\left(\frac{60 - 50}{5}\right) = \frac{1}{5}\varphi(2) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}0540 = 0{,}0108$$

Ответ: 0,0108.

2.6. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$ событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз приближённо равна

$$P(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$ - функция Лапласа,

$x_1 = (m_1 - np)/\sqrt{npq}$, $\quad$ $x_2 = (m_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$ для положительных значений x $(0 \le x \le 5)$ приведена в Приложении 2. При этом следует иметь в виду, что $\Phi(x)$ нечётная функция, поэтому $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Можно также считать, что, если $x > 5$, то $\Phi(x) = 0,5$.

Пример. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты орёл выпадет не менее 40 и не более 60 раз.

Решение. Имеем $n = 100$; $p = 0,5$; $q = 0,5$; $m_1 = 40$; $m_2 = 60$.

Применим интегральную формулу Муавра-Лапласа

$$P(40, 60) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа,

$$x_1 = (40 - 100\cdot 0,5)/\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5} = -2,$$

$$x_2 = (60 - 100\cdot 0,5)/\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5} = 2.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечётная функция, получим

$$P(40 \le m \le 60) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2).$$

По таблице Приложения 2 находим $\Phi(2) = 0,4772$.

Значит,

$$P(40 \le m \le 60) = 2\cdot 0,4772 = 0,9545.$$

Ответ: 0,9545.

2.7. Правило «трёх сигм» в схеме Бернулли

Определение. Событие B называется практически достоверным, если вероятность появления этого события $P(B)$ не меньше числа 0,9973; отметим, что в этом случае $P(B) \ge 2\Phi(3)$, т. е. $P(B) \ge 0,9973$.

Теорема. Практически достоверно, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$ событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, если $m_1 = np - 3\sigma$, а $m_2 = np + 3\sigma$, где $\sigma = \sqrt{npq}$.

Доказательство. Пусть число n велико; введём величину $\sigma = \sqrt{npq}$ и применим интегральную формулу Муавра-Лапласа для случая, когда

$$m_1 = np - 3\sigma,\ m_2 = np + 3\sigma.$$

В этом случае

$$x_1 = ((np - 3\sigma) - np)/\sigma = -3,\ x_2 = ((np + 3\sigma) - np)/\sigma = 3.$$

Вероятность того, что событие A в n испытаниях наступит не менее m_1 и не более m_2 раз приближённо равна

$$P(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Т.е., практически достоверно, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз. Интервал $[np - 3\sigma,\ np + 3\sigma]$ называется трёхсигмовым.

Пример Некоторая сложная система состоит из 10000 независимых элементов. Вероятность выхода из строя одного элемента равна $P = 0{,}0025$. Пусть m – количество вышедших из строя элементов. Найти трёхсигмовый интервал для числа вышедших из строя элементов.

Решение. Имеем $n = 10000$; $p = 0{,}0025$; $q = 0{,}9975$.

При этом

$$\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}9975} = 4{,}994:$$

$$m_1 = np - 3\sigma = 10{,}018;$$

$$m_2 = np + 3\sigma = 39{,}082;$$

Значит, с вероятностью $p = 0{,}9973$ можно утверждать, что количество неисправных элементов будет находиться в пределах [10;40].

Ответ: [10;40].