Практические занятия по «Основам научных исследований»

Занятие 1. Входной контроль

Вариант для отработки пропуска

1) В старой фирме «Браун энд Джонс» капитал Брауна в полтора раза превышал капитал долю Джонса. Было решено принять в долю и Робинсона при условии, что он оплатит третью часть капитала фирмы, внеся 150*N долларов, которые следовало разделить между старыми владельцами так, чтобы доли двух старых партнеров при новом суммарном капитале оказались прежними. Как именно следовало разделить 150*N долларов?
2) 1/5 пчелиного роя полетела на цветы лаванды, 1/3 – на цветы липы, утроенная разность этих чисел полетела на персик, сколько пчел осталось в улье, если всего было 50N* пчел?
3) У скольких целых чисел, лежащих в диапазоне от 1 до 1000, есть цифра n?
4) Шофер, посмотрев на счетчик спидометра своей машины, был поражен. Счетчик показывал число 1n9n1. Количество километров, пройденных машиной, выражалось симметричным числом, то есть таким, которое читалось одинаково как слева направо, так и справа налево: 1n9n1.- Занятно! - пробормотал шофер. - Теперь нескоро, наверное, появится на счетчике другое симметричное число. Однако ровно через 2 часа счетчик показал новое число, которое тоже в обе стороны читалось одинаково. Определите, с какой скоростью ехал эти 2 часа шофер?

   Где N – номер в списке группы, n – последняя цифра номера в списке группы (если номер двухзначный, n=N, если номер в списке группы состоит из одной цифры)

Занятие 2. Накопленные суммы

1000% годовых – это много или не очень? Можно ли хотя бы теоретически обеспечить такую доходность в обычных условиях, то есть при отсутствии инфляции и не слишком высокой доходности реальных инвестиций?

Вопреки несколько поспешным утверждениям некоторых экономистов, ответ будет положительным, что можно легко доказать на достаточно простом примере.

Наверное, никто не назовет доходность в 20% годовых завышенной. Достичь ее можно даже при инвестировании средств в достаточно надежные проекты. Если мы имеем возможность положить деньги в банк под такую доходность, то при начислении процентов раз в год наш вклад величится:

через 5лет – в $(1+20/100)^5=1,2^5$ = 2,49 или ((2,49-1)/1)*100%=149%

через 10лет – в $1,2^{10}$=6,19 раза или на 519%,

через 20лет – в $1,2^{20}$=38,34 раза или на 3734%,

через 30лет – в $1,2^{30}$= 237,38 раза или на 23638%,

а через 32года – в $1,2^{32}$=341,82 раза или на 34082%, что при перерасчете на год составит 34082%/32=10165 % годовых.

Как видите, если фирма будет принимать от вкладчиков деньги на срок не менее 32лет и начислять проценты только в конце этого периода, то обеспечить 1000% годовых она вполне в состоянии. Даже если размещать полученные средства она будет в обычном банке.

Пример 1. Какая ставка r(*100)% годовых должна быть, чтобы через t=10 лет доходность составила R=2(*100) % годовых?

Решение:

$$\frac{(1+r)^t-1}{t}=R\,;\ r=(t\cdot R+1)^{1/t}-1.$$

t=10 лет; *R*=200%; *r*=$(10*2+1)^{1/10}$ – 1=0,36 (36% годовых).

Пусть на банковском счете имеется некоторая сумма (10000 руб.) Банк обязуется начислять на эти деньги 20 % годовых. Однако начисления накопившихся процентов могут производиться с разной периодичностью: раз в год, раз в квартал, ежемесячно, ежедневно и т.д. При этом по истечении года на счету будут разные суммы денег.

При ежегодном начислении – $10000(1+0{,}2)=12000\,руб.$;

при ежеквартальном начислении $10000\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^4=12155{,}06$ руб.;

при ежемесячном начислении $10000\left(1+\frac{0{,}2}{12}\right)^{12}=12193{,}91$ руб.;

при ежедневном начислении $10000\left(1+\frac{0{,}2}{365}\right)^{365}=12213{,}36$ руб.

Если перейти к «непрерывному» проценту, то

$$10000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}2}{n}\right)^n=10000\,e^{0{,}2}=12214{,}03 \text{ руб.}$$

В общем случае, когда на вклад проценты начисляются в течение *t* лет $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{t\cdot n}=e^{r\cdot t}$.

Общая накопленная сумма за *t* лет при «непрерывной» ставке процента *r* равна $C(t)=C_0e^{r\cdot t}$

Пример 2. На сколько лет необходимо поместить сумму в C_0=1000 ₽ под r=20 % годовых с непрерывным начислением процентов, чтобы получить C(t)=1 000 000 ₽?

Решение:

$$\ln\frac{C(t)}{C_0}=r\cdot t; \qquad t=\frac{\ln\frac{C(t)}{C_0}}{r}.$$

$$C_0=1000руб.;\ C(t)=1000000руб.;\ r=0{,}2\cdot 100\%.$$

$$t=\frac{\ln\frac{1000000}{1000}}{0{,}2}=\frac{6{,}908}{0{,}2}=34{,}54\ (лет).$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Какая ставка r(*100)% годовых должна быть, чтобы через *t*=(2+[N/3]) лет доходность составила *R*=N*50 % годовых? (N – номер в списке группы).

Задача 2. На сколько лет необходимо поместить сумму в C_0=(100*N) руб. под $r=\frac{N}{55}(\cdot 100)$ % годовых с непрерывным начислением процентов, чтобы получить C(t)=(2 000*N) руб.?

Занятие 3. Принцип равных доходностей

Рассчитать, как будет изменяться в будущем рыночная цена облигации, если участникам рынка заранее известны все денежные суммы, которые будут выплачены ее держателям, а также сроки всех этих выплат.

Единственная аксиома, на которой строится все рассуждения, заключается в предположении о том, что все рыночные трейдеры, потенциальные покупатели и продавцы облигаций, в своих действиях руководствуются одними и теми же соображениями.

Как должна себя вести прогнозируемая всеми участниками рынка цена бумаг в промежутках между выплатами:

Во-первых, очевидно, что она не должна падать. Иначе, держатели облигаций просто продавали бы их непосредственно перед грядущим падением, а после вновь покупали бы по более низкой цене.

Во-вторых, поскольку в интервалах между выплатами держатели облигаций не получают дохода в иной форме, кроме как за счет роста цены своих бумаг, этот рост должен обеспечивать им по крайней мере такую же доходность, как и другие альтернативные варианты инвестирования, банковский депозит, например. В противном случае, они опять же продавали бы свои облигации в начале каждого такого интервала, помещали вырученные от продажи деньги в банк под проценты, а ближе к концу интервала, сняв деньги с банковского счета, вновь покупали бы облигации, чтобы получить причитающиеся по ним выплаты.

В-третьих, рост этот не может быть более быстрым, чем рост банковского вклада. Иначе никто не захочет держать деньги в банке.

Таким образом, остается только одно – цена облигаций в промежутках между выплатами должна расти с такой же скоростью, как и банковский вклад. А это значит, что для любых двух моментов времени $\boldsymbol{t_1}$ и $\boldsymbol{t_2}$ принадлежащих одному и тому же промежутку должно выполняться соотношение:

$$\frac{P(t_2)}{P(t_1)}=(1+r)^{t_2-t_1}$$

или $P(t_1)=\frac{P(t_2)}{(1+r)^{t_2-t_1}}$,

где $P(t_1)$ и $P(t_2)$ – цены в моменты t_1 и t_2, а r – банковский процент, который должен соответствовать единице времени при измерении временного интервала (t_2-t_1).

Следовательно, цена облигаций должна расти экспоненциально, то есть, увеличиваясь за любые равные промежутки времени в одинаковое количество раз:

$$P(t)=P(0)\cdot(1+r)^t,$$

где P(0) – цена в некоторый начальный момент времени.

В моменты выплат цена облигации должна падать ровно на величину выплаченных по ней денег. Ибо в противном случае – люди будут либо избавляться от облигаций перед выплатами и выкупать их после этого, либо, наоборот, будут покупать их только на один день, чтобы получить причитающиеся по ним суммы.

Пример 1. Допустим, что облигация сулит своим держателям 500 рублей через 3 года, 200 рублей через 4года и 1000 рублей через 8лет, считая с сегодняшнего дня. После чего она считается погашенной. Банковский процент составляет 30% в год. Определить сегодняшнюю цену облигации.

Решение:

Рассчитать сегодняшнюю цену удобно от дня погашения к текущему моменту. По прошествии восьми лет цена облигации будет равна нулю, а непосредственно перед погашением она составит 1000 рублей. Далее, с конца восьмого года до конца четвертого ее цена будет уменьшаться в 1,3 раза ежегодно. Затем скачком увеличится на 200 рублей, и снова будет уменьшаться в 1,3 раза вплоть до окончания третьего года. Затем цена опять поднимется на 500 рублей, и снова будет уменьшаться вплоть до сегодняшнего дня:

$P(8) = 1000\ p.$

$P(8-4) = \frac{1000}{1{,}3^4} = 350{,}13p.;$

$P(4) = 350{,}13 + 200 = 550{,}13\ p.$

$P(4-1) = \frac{550{,}13}{1{,}3^1} = \ 423{,}18\ p.$

$P(3) = 455{,}17 + 500 = 923{,}18\ p.$

$P(3-3) = P(0) = \frac{9232{,}18}{1{,}3^3} = 420{,}19\ \ p.$

$$P(0) = ((\frac{1000}{1{,}3^4} + 200)/1{,}3 + 500)/1{,}3^3 = 420{,}2 \text{ руб.}$$

Пример 2. В начальный момент обладатель банковской кредитной карты имеет на своем счете 300 рублей. Через два месяца он пополняет свой счет на 200 рублей, а еще через месяц совершает покупку на сумму 1000 рублей, расплачиваясь в магазине при помощи кредитной карты. По прошествии же еще двух месяцев, он вносит на счет 700 рублей и в течение дальнейших трех месяцев никаких действий не производит. Какая сумма будет на счету по истечении 8 месяцев, если банк начисляет каждый месяц 2% как по вкладам, и 3% по кредитам.

Решение:

$P(2)_- = 300(1 + 2 \cdot 0{,}02) = 312\ p.$

$P(2)_+ = 312 + 200 = 512\ p.$

$P(3)_- = 512(1 + 0{,}02) = 522{,}24\ p.$

$P(3)_+ = 522{,}24 - 1000 = -477{,}76\ p.$

$P(5)_- = -477{,}76(1 + 2 \cdot 0{,}03) = -506{,}43\ p.$

$P(5)_+ = -506{,}43 + 700 = 193{,}57\ p.$

$P(8) = 193{,}57(1 + 3 \cdot 0{,}02) = 205{,}19\ p.$

Или: $P(8) = \left(\left(\left(\left((300 \cdot 1{,}04) + 200\right) \cdot 1{,}02 - 1000\right) \cdot 1{,}06\right) + 700\right) \cdot 1{,}06 = 205{,}19\ p.$

Ответ: $P(8) = 205{,}19\ p.$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. По облигации предусмотрены следующие выплаты:

через 2 года – N тыс. руб., через 4 года – (N/2) тыс. руб., через 7 лет – 2N тыс. руб. и через 10 лет N тыс. руб. После чего она считается погашенной. Банковский процент составляет (10+N/10)% в год. Определить сегодняшнюю цену облигации.

Задача 2. В начальный момент обладатель банковской кредитной карты имеет на своем счете $(N \cdot 1000)$ рублей. Через два месяца он пополняет свой счет на $(N \cdot 50)$рублей, а еще через месяц совершает покупку на сумму $(N \cdot 1500)$рублей, расплачиваясь в магазине при помощи кредитной карты. По прошествии еще двух месяцев, он вносит на счет $(N \cdot 750)$рублей. Через месяц он совершает покупку на сумму $(N \cdot 500)$ рублей, расплачиваясь кредитной картой. Через три месяца клиент пополняет карточный счет на сумму $(N \cdot 400)$ и в течение дальнейших трех месяцев никаких действий не производит. Какая сумма будет на счету по истечении 12 месяцев, если банк начисляет каждый месяц 4% как по вкладам, так и по кредитам.

Занятие 4

Перпетуитеты

Перпетуитеты – облигации, по которым их эмитент обязуется выплачивать фиксированные суммы ежегодно и до скончания времен. Как же в этом случае найти истинную стоимость облигаций, когда срок их обращения бесконечен?

В промежутках между ежегодными выплатами, цена облигаций должна расти со скоростью банковского вклада. То есть, если банк начисляет ***r*** годовых единиц (***r*** $*$***100*** процентов в год), то облигации должны за это же время вырастать в цене в ***(1+r)*** раз. При этом также известно, что после каждой выплаты бумаги будут дешеветь ровно на величину выдаваемых держателям денег. Если сегодня цена облигации составляет ***P*** рублей, то ровно через год она будет стоить столько же, поскольку через год она будет "обещать" своим держателям то же самое, что и сегодня – бесконечную последовательность ежегодных платежей. Следовательно, цена перпетуитета будет периодически (с периодом в один год) возвращаться "на круги своя", падая после каждой выплаты на столько же рублей, на сколько она выросла в течение года. Но для этого необходимо, чтобы соблюдалось равенство:

$$P_0(1+r)-P_0=S,$$

где P_0 – цена облигации сразу после выплаты; ***S*** – величина выплаты в рублях.

Решая это уравнение относительно P_0 , получим:

$$P_0=\frac{S}{r}.$$

Таким образом, при банковской ставке ***25***% годовых облигация, держатели которой будут получать ежегодно по ***100*** рублей, будет стоить:

$$P_0=\frac{100}{0{,}25}=400 \text{ руб.}$$

после каждой выплаты и:

$P=P_0(1+r)=400(1+0{,}25)=500$ руб. непосредственно перед выплатами.

Пример 1

По какой цене был приобретен перпетуитет, если спустя 10 лет и 8 месяцев ее можно продать за 10000 руб., и чему равна ежегодная выплата? Банковская ставка *r*=20%.

Решение:

$$P_0\left(1+\frac{m}{12}r\right)=P_m, \quad \Rightarrow \quad P_0=\frac{P_m}{1+\frac{m}{12}r};$$

$$P_0=\frac{10000}{1+\frac{8}{12}0{,}2}=882{,}35 \text{ руб. } P_{12}=P_0(1+r)=882{,}35(1+0{,}2)=1058{,}82 \text{ руб.}$$

Задание для самостоятельного решения

1. Выбор и постановка научных проблем
2. Разработка и решение научных проблем
3. *Задача*. По какой цене был приобретен перпетуитет, если спустя *N* лет и $m=(2+\left[\frac{N}{3}\right])$ месяцев ее можно продать за $S=1000N$ руб., и чему равна ежегодная выплата? Какова цена перпетуитета за месяц до выплаты и перед выплатой? Банковская ставка $r=(10+N/2)\%$.

Занятие 5

Пример 1. Имеется облигация со сроком обращения 1год. Ее держатели получат по ней доход в денежной форме только в конце этого срока, при погашении бумаг. Его сумма составит 1000 рублей, плюс премия в размере 80% от средней рыночной цены облигации (средней биржевой котировки) за весь период ее обращения. Следует рассчитать справедливую начальную стоимость этих бумаг. Банковская ставка равна 2% в месяц.

Решение:

Поскольку до истечения периода обращения никаких выплат по облигациям не производится, можно утверждать, что их рыночная цена будет непрерывно нарастать по экспоненциальному закону. При этом мы знаем, что банковский вклад за месяц увеличивается в 1,02 раза. Следовательно, зависимость цены от времени выразится формулой:

$$P(t) = P_0(1+r)^t$$

где P_0– цена в начальный момент времени.

Найдем среднюю цену

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{P_0}{T}\int_0^T (1+r)^t dt = \frac{P_0}{T}\frac{(1+r)^t}{\ln(1+r)}\Bigg|_0^T = \frac{P_0}{T}\frac{1}{\ln(1+r)}\left((1+r)^T - 1\right).$$

Цена к моменту погашения составит, с одной стороны:

$$P(T) = P_0(1+r)^T,$$

с другой стороны

$$M + \frac{kP_0}{T\ln(1+r)}\left((1+r)^T - 1\right),$$

тогда

$$P_0(1+r)^T = M + \frac{kP_0}{T\ln(1+r)}\left((1+r)^T - 1\right),$$

и

$$P_0 = \frac{M}{(1+r)^T - \frac{k}{T\ln(1+r)}\left((1+r)^T - 1\right)}$$

$$P_0 = \frac{1000}{1{,}02^{12} - \frac{0{,}8}{12\ln 1{,}02}(1{,}02^{12} - 1)} = 2738{,}30 \ \textit{руб}.$$

Средняя цена $\overline{P} = \frac{P_0}{T}\frac{1}{\ln(1+r)}\left((1+r)^T - 1\right) = \frac{2738{,}3}{12\ln 1{,}02}(1{,}02^{12} - 1) = 3091{,}03$ руб.

Премия= $\frac{kP_0}{T\ln(1+r)}\left((1+r)^T - 1\right) = \frac{0{,}8 \cdot 2738{,}3}{12\ln 1{,}02}(1{,}02^{12} - 1) = 2472 \ \textit{руб}.$

Сумма погашения = 1000 + 2472 = 3472 руб.

Задание для самостоятельного решения

1) Задача. Имеется облигация со сроком обращения 1год. Ее держатели получат по ней доход в денежной форме только в конце этого срока, при погашении бумаг. Его сумма составит (1000N) рублей, плюс премия в размере (60+N/2)% от средней рыночной цены облигации (средней бир-

жевой котировки) за весь период ее обращения. Следует рассчитать справедливую начальную стоимость этих бумаг, их среднюю цену, премию и сумму погашения. Банковская ставка равна (2+N/5)% в месяц.

2) Общие закономерности развития науки.

3) Методы анализа и построения научных теорий.