МОФР Практические занятия

1. Входной контроль

2. Цены финансовых инструментов

Задача 1. 21.03.2015 на банковский счет была положена сумма V(s)= 1000 руб. под r=10% годовых. Какая сумма на счету будет 15.10.2015?

Решение: $V(t)=V(s)e^{r(t-s)}$.

$$t-s=\frac{9\cdot 30+15-(2\cdot 30+21)}{360}=0{,}557.$$

$V(t)=1000e^{0{,}1\cdot 0{,}557}=1057{,}28$ руб.

Задача 2. 01.04.2015 г. в банк внесена сумма 1000 руб. Когда на банковском счету накопится сумма 1500 руб., если процентная ставка составляет 14% годовых?

Решение: $t=s+\frac{1}{r}\ln\frac{V(t)}{V(s)}=\frac{91}{360}+\frac{1}{0{,}14}\ln\frac{1500}{1000}=\frac{91}{360}+2{,}896=\frac{91+1033}{360}=\frac{1124}{360}$

t=1124 (дн.), т.е. 15 мая 2017 г.

Задача 3. Какой будет накопленная на банковском счету сумма через 2 года, если процентная ставка от 16% годовых каждый год будет снижаться на 2%. Первоначальная сумма 1000 руб.

Решение:

$$V(t)=V(s)e^{\int_s^t r(t-s)}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

В нашем случае – две точки с координатами $A(0;r_0);B(t;r_0-t\Delta r)$.

Тогда $\frac{r-r_0}{r_0-t\Delta r-r_0}=\frac{\tau}{t};r=r_0-t\Delta r\tau$.

$$\int_0^t(r_0-t\Delta r\tau)d\tau=(r_0\tau-t\Delta r\frac{\tau^2}{2})_0^t=r_0t-\Delta r\frac{t^3}{2}.$$

$V(2)=1000e^{0{,}16\cdot 2-4\cdot 0{,}02}=1271{,}25$ руб.

Задача 4. Определить цену купонной облигации номиналом 1000 руб. сроком действия 2 года с ежеквартальной выплатой дивидендов в размере 200 руб., рыночная процентная ставка составляет 12% годовых.

Решение: Цена купонной облигации равна

$P_C(n)=Ve^{-rn}+C\sum_{k=1}^{mn}e^{-\frac{rk}{m}}$, $r-$ эффективная процентная ставка:

$r = (1+\frac{j}{m})^m - 1$; $j-$ рыночная процентная ставка.

Сумма в формуле – это сумма элементов геометрической прогрессии, которая равна

$$\sum_{k=1}^{mn} e^{-\frac{rk}{m}} = \frac{1-e^{-rn}}{e^{\frac{r}{m}}-1}.$$

$$r = (1+\frac{j}{m})^m - 1 = (1+\frac{0{,}12}{4})^4 - 1 = 0{,}1255\,(12{,}55\%).$$

$$\sum_{k=1}^{4\cdot 2} e^{-\frac{0{,}1255k}{4}} = \frac{1-e^{-0{,}1255\cdot 2}}{e^{\frac{0{,}1255}{4}}-1} = 6{,}965.$$

$P_C(2) = 1000e^{-0{,}251} + 200\cdot 6{,}965 = 2171$ руб.

По облигации номинально будет получено $V + mnC = 1000 + 4\cdot 2\cdot 200 = 2600$ руб.

Задания для самостоятельного решения:

Задача 1. Сегодня (сегодняшняя дана) в банк внесена сумма $(1000\cdot N)$ руб. Когда на банковском счету накопится сумма $(1000\cdot N + 200)$ руб., если процентная ставка составляет $(10+\frac{N}{2})$ % годовых?

Задача 2. Какой будет накопленная на банковском счету сумма через 2 года, если процентная ставка от $(10+\frac{N}{2})$ % годовых каждый год будет снижаться на $(\frac{N}{10})$ %. Первоначальная сумма $(1000\cdot N)$ руб.

Задача 3. Определить цену купонной облигации номиналом $(1000\cdot N)$ руб. сроком действия 2 года с ежеквартальной выплатой дивидендов в размере $(20\cdot N)$ руб., рыночная процентная ставка составляет $(10+\frac{N}{2})$ % годовых.

$N-$ номер в списке группы.

3. Формулы Блека-Шоулза

Пусть финансовые рынки удовлетворяют следующим условиям:

- ✓ рынки являются совершенными;
- ✓ существует безрисковая процентная ставка, одинаковая для всех сроков и не меняющаяся со временем;
- ✓ отсутствуют прибыльные арбитражные возможности.

Тогда для европейских опционов на бездивидендную акцию справедливы формулы Блека-Шоуза:

$$c = S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

$$p = K\,e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\,\Phi(-d_1)$$

где c – цена опциона «call»;

p – цена опциона «put»;

S – цена базисных активов в текущий момент времени t;

K – цена исполнения опционов (страйк-цена);

r – безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении;

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (T-t)\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t};$$

σ – волатильность базисных активов (стандартное отклонение цены базисных активов);

$T-t$ – интервал времени до исполнения (в годах)

$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция стандартного нормального распределения; в Excel – НОРМСТРАСП(z). Существуют формулы приближенного вычисления значений этой функции на калькуляторе:

для $z > 1{,}5 \Rightarrow \Phi(z) = 1 - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$;

для $z < 1{,}5 \Rightarrow \Phi(z) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(z - \frac{z^3}{6}\right)$.

Пример 1. Найти стоимости 6-месячных европейских опционов «колл» и «пут» на бездивидендную акцию с ценой исполнения 40 USD, когда текущая цена акции 42 USD, волатильность цены акции составляет 20%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении процентов равна 10% годовых.

Решение

В данном случае $S = 42USD; K = 40USD; r = 0{,}1; \sigma = 0{,}2; T - t = \frac{6}{12} = 0{,}5$.

Тогда $d_1 = \frac{\ln(42/40) + 0{,}5\left(0{,}1 + \frac{0{,}2^2}{2}\right)}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693;$

$$d_2 = 0{,}7693 - 0{,}2\sqrt{0{,}5} = 0{,}6278.$$

$\Phi(d_1) = \Phi(0{,}7693) = 0{,}7791;$

$\Phi(d_2) = \Phi(0{,}6278) = 0{,}7349;$

$\Phi(-d_1) = \Phi(-0{,}7693) = 0{,}2209;$

$\Phi(-d_2) = \Phi(-0{,}6278) = 0{,}2651.$

Следовательно,

$c = 42 \cdot 0{,}7791 - 40 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 0{,}5} \cdot 0{,}7349 = 4{,}76USD,$

$p = 40 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 0{,}5} \cdot 0{,}2651 - 42 \cdot 0{,}2209 = 0{,}81USD.$

Задача для самостоятельного решения

Найти стоимости 6-месячных европейских опционов «колл» и «пут» на бездивидендную акцию с ценой исполнения (10N) USD, когда текущая цена акции (10(N+1))USD, волатильность цены акции составляет (10+N/5)%, а безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении процентов равна (2+N/5)% годовых.

4. Расчет стоимости европейских опционов на валюту

Пример. Найти стоимости 6-месячных европейских опционов на поставку 10 000 USD, если курс USD/RUB менялся следующим образом

День	0	1	2	3	4	5
Курс (RUB за 1 USD)	65	68	66	64	62	64

Процентная ставка в США – 1,5% годовых, в РФ 15% годовых.

Решение.

Найдем волатильность курса доллара в рублях:

День	1	2	3	4	5
Изменение курса (δ) %	4,6	-2,9	-3	-3	3

$\bar{\delta} = -0{,}26\%,\ \sigma = 3{,}75\%$.

Спот-курс $S = 64\ RUB$, курс-форвард (курс поставки валюты через полгода)

$$K = S\frac{1+i_{RU}\cdot t}{1+i_{US}\cdot t};$$

t – период в годах ($t = \frac{6}{12}$).

$$K = 64\frac{1+0{,}15\cdot 0{,}5}{1+0{,}015\cdot 0{,}5} = 68{,}29\,(RUB).$$

Цены опционов:

$$c = S\,\Phi(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

$$p = K\,e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\,\Phi(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K)+(T-t)\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}};\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t};$$

где $r = i_{RU} - i_{US}$;

$$d_1 = \frac{\ln\frac{64}{68{,}29} + 0{,}5(0{,}135+\frac{0{,}0375^2}{2})}{0{,}0375\sqrt{0{,}5}} = 0{,}112;\ d_2 = 0{,}112 - 0{,}0375\sqrt{0{,}5} = 0{,}0855;$$

$\Phi(d_1) = 0{,}5446;\ \Phi(d_2) = 0{,}5341;\ \Phi(-d_1) = 0{,}4554;\ \Phi(-d_2) = 0{,}4659.$

$c = 64\cdot 0{,}5446 - 68{,}29\cdot e^{-0{,}135\cdot 0{,}5}\cdot 0{,}5341 = 0{,}7614\,(RUB);$

$$p = 68{,}29 \cdot e^{-0{,}135 \cdot 0{,}5} \cdot 0{,}4659 - 64 \cdot 0{,}4554 = 0{,}5940\,(RUB).$$

Цена опциона на покупку валюты= 10 000·0,7614=7 614 RUB;

Цена опциона на продажу валюты =10 000·0,594=5 940 RUB.

Задача. Найти стоимости 6-месячных европейских опционов на поставку 10 000 INV, если курс INV/RUB менялся следующим образом

День	0	1	2	3	4	5
Курс (RUB за 1 INV)	2N	2N+1	1,9N	2N+2	2N+1	2N+3

Процентная ставка в IN –(1+N/5)% годовых, в РФ 15% годовых.

4. Греческое хеджирование

Пример 1. Определить показатель дельта 3-месячных европейских опционов на бездивидендную акцию с ценой исполнения 100 долл., когда текущая спот-цена акции равна 98 долл., волатильность акции оценивается в 40%, а безрисковая процентная ставка при сложном начислении равна 1,5% годовых.

Решение:

$$\Delta_c = e^{-q(T-t)}\Phi(d_1);$$

$$\Delta_p = -e^{-q(T-t)}\Phi(-d_1),$$

где
$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + (T-t)(r - q + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

В данном случае

S = 98 долл.; *X* = 100 долл.; *i* = 0,08; *q* = 0; *T* - *t* = 3/12; σ= 0,4.

Процентная ставка для непрерывного начисления определяется по формуле:

$1 + i = e^r \Rightarrow r = \ln(1+i)$, т.е. $r = \ln(1 + 0{,}015) = 0{,}0149\,(1{,}49\%)$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{98}{100} + \frac{3}{12}(0{,}0149 + \frac{0{,}4^2}{2})}{0{,}4\sqrt{\frac{3}{12}}} = 0{,}0176$$

Ф (0,0176) =0,51; Ф(-0,0176)= 0,493

Следовательно, $\boldsymbol{\Delta}_c = 0{,}51$, $\boldsymbol{\Delta}_p = -0{,}493$.

Из равенства

$\Delta\Pi \approx \Delta \cdot (\delta S)$

следует, что, если цена базисной акции мгновенно вырастет на 1 долл., то цена опциона «пут» на эту акцию уменьшится на 0,493 USD, а цена опциона «колл» – возрастет на 0,51 USD.

Пример 2. Финансовый институт продал 5-недельный европейский опцион «колл» на 100 000 бездивидендных акций с ценой исполнения 50 долл., когда текущая цена акции равна 49 долл., волатильность акции составляет 25%, а безрисковая процентная ставка равна 6%. Провести дельта-хеджирование и определить его издержки (Сценарий приведен в таблице)

Для хеджирования своей позиции финансовый институт решает использовать операции с базисной акцией и ребалансировать свою позицию еженедельно.

ДЕЛЬТА-ХЕДЖИРОВАНИЕ ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ

Номер недели i	Цена акции S_i	Коэффициент дельта Δ_i	Количество покупаемых (продаваемых) акций $A_i = 100000(\Delta_i - \Delta_{i-1})$	Стоимость покупаемых акций $A_i \cdot S_i$	Накопленные издержки $Q_i = Q_{i-1}e^{\frac{1}{52}0{,}05} + A_i \cdot S_i$
0	49,000	0,5302	53 016,00	2 597 784,00	2 597 784,00
1	48,125	0,5292	-92,00	-4 427,50	2 643 797,34
2	47,375	0,5284	-81,00	-3 837,38	2 691 294,24
3	50,250	0,5314	302,00	15 175,50	2 758 726,25
4	51,750	0,5330	151,00	7 814,25	2 820 106,33
5	53,125	1,0000	46 704,00	2 481 150,00	5 356 013,98

В момент исполнения опциона финансовый институт обязан продать 100 000 акций по цене исполнения опциона в 50 долл.

Следовательно, чистые затраты финансового института составят 5 356 014−5 000 000 = 356 014 долл., а приведенные чистые затраты равны

$$356014e^{-0{,}06\frac{5}{52}} = 353966.$$

Премия за опцион составляет 1 158 452,44 долл. Таким образом, чистые приведенные издержки финансового института (без учета комиссионных) равны

353 9664−долл. − 1 158 452,44долл. = -804 486,54 долл.(т.е. прибыль)

Отметим, что при отсутствии хеджирования чистые приведенные издержки составили бы

$$5\,356\,014 USD \cdot e^{-0{,}05\frac{5}{52}} - 353\,966 USD = 5\,002\,048\, USD.$$

Задача

Финансовый институт продал *N*-недельный европейский опцион «колл» на 100 000 бездивидендных акций с ценой исполнения (10+N) долл., когда текущая цена акции равна *(9,2+N)* долл., волатильность акции составляет *(20+N)* %, а безрисковая процентная ставка равна *(1+N)*%. Цена акции будет меняться, как указано в таблице:

Неделя	0	1	2	3
Цена (USD)	9,2+N	9,0+N	8,8+N	9,3+N

Провести дельта-хеджирование и определить его издержки.