

Математическое обеспечение финансовых решений

Контрольная работа для студентов заочной формы обучения

I. Задачи

Задача 1. Сегодня (сегодняшняя дана) в банк внесена сумма $(1000 \cdot N)$ руб. Когда на банковском счету накопится сумма $(1000 \cdot N + 200)$ руб., если процентная ставка составляет $(10 + \frac{N}{2})\%$ годовых?

Задача 2. Какой будет накопленная на банковском счету сумма через 2 года, если процентная ставка от $(10 + \frac{N}{2})\%$ годовых каждый год будет снижаться на $(\frac{N}{10})\%$.

Первоначальная сумма $(1000 \cdot N)$ руб.

Задача 3. Определить цену купонной облигации номиналом $(1000 \cdot N)$ руб. сроком действия 2 года с ежеквартальной выплатой дивидендов в размере $(20 \cdot N)$ руб., рыночная процентная ставка составляет $(10 + \frac{N}{2})\%$ годовых.

N – сумма последних цифр зачётной книжки плюс 3.

II. Темы рефератов

1. Теория ожидаемой полезности Неймана-Моргенштерна.
2. Теории субъективной ожидаемой полезности Сэвиджа, Энскомба и Ауманна.
3. Биномиальная модель цен финансовых активов. Построение дерева цен.
4. Оценка европейских и американских опционов на бездивидендный актив.
5. Теория Блэка – Шоулза. Формула Блэка – Шоулза для цены европейского опциона на бездивидендный актив.
6. Однопериодная модель фондового рынка. Модель в условиях определенности.
7. Однопериодная модель фондового рынка. Модель в условиях неопределенности.
8. Вывод цен ценных бумаг из соображений равновесия.
9. Ценные бумаги Эрроу – Дебре.
10. Равновесный подход и риск-нейтральное оценивание.
11. Вывод модели оценки фондовых активов (CAPM).
12. Вывод формулы Блэка – Шоулза из равновесной модели.
13. Оценка VaR портфеля, включающего деривативы.
14. Кредитный риск. Структурные модели: подход Мертона.
15. Практические методики оценки кредитного риска (CreditRisk+, CreditMonitor).
16. Колебания волатильности. GARCH модели. Модели стохастической волатильности.

17. Оценка права обменять один актив на другой. Уравнение, связывающее цену дериватива с рыночной ценой риска.
18. Метод НЖМ.
19. Оценка деривативов с использованием стохастической модели для форвардных ставок (метод Хита – Джерроу – Мортон).

(Номер темы реферата равен сумме последних двух цифр зачетной книжки плюс единица)

III. Пример решения задач

Задача 1. 21.03.2015 на банковский счет была положена сумма $V(s) = 1000$ руб. под $r = 10\%$ годовых. Какая сумма на счету будет 15.10.2015?

Решение: $V(t) = V(s)e^{r(t-s)}$.

$$t - s = \frac{9 \cdot 30 + 15 - (2 \cdot 30 + 21)}{360} = 0,557.$$

$$V(t) = 1000e^{0,1 \cdot 0,557} = 1057,28 \text{ руб.}$$

Задача 2. 01.04.2015 г. в банк внесена сумма 1000 руб. Когда на банковском счету накопится сумма 1500 руб., если процентная ставка составляет 14% годовых?

$$\text{Решение: } t = s + \frac{1}{r} \ln \frac{V(t)}{V(s)} = \frac{91}{360} + \frac{1}{0,14} \ln \frac{1500}{1000} = \frac{91}{360} + 2,896 = \frac{91 + 1033}{360} = \frac{1124}{360}$$

$t = 1124$ (дн.), т.е. 15 мая 2017 г.

Задача 3. Какой будет накопленная на банковском счету сумма через 2 года, если процентная ставка от 16% годовых каждый год будет снижаться на 2%. Первоначальная сумма 1000 руб.

Решение:

$$V(t) = V(s)e^{\int_s^t r(t-s)}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

В нашем случае – две точки с координатами $A(0; r_0); B(t; r_0 - t\Delta r)$.

$$\text{Тогда } \frac{r - r_0}{r_0 - t\Delta r - r_0} = \frac{\tau}{t}; r = r_0 - t\Delta r \tau.$$

$$\int_0^t (r_0 - t\Delta r \tau) d\tau = (r_0 \tau - t\Delta r \frac{\tau^2}{2})_0^t = r_0 t - \Delta r \frac{t^3}{2}.$$

$$V(2) = 1000e^{0,16 \cdot 2 - 4 \cdot 0,02} = 1271,25 \text{ руб.}$$

Задача 4. Определить цену купонной облигации номиналом 1000 руб. сроком действия 2 года с ежеквартальной выплатой дивидендов в размере 200 руб., рыночная процентная ставка составляет 12% годовых.

Решение: Цена купонной облигации равна

$$P_C(n) = Ve^{-rn} + C \sum_{k=1}^{mn} e^{-\frac{rk}{m}}, \quad r - \text{эффективная процентная ставка:}$$

$$r = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1; \quad j - \text{рыночная процентная ставка.}$$

Сумма в формуле – это сумма элементов геометрической прогрессии, которая равна

$$\sum_{k=1}^{mn} e^{-\frac{rk}{m}} = \frac{1 - e^{-rn}}{\frac{r}{m} - 1}.$$

$$r = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^4 - 1 = 0,1255 \text{ (12,55\%).}$$

$$\sum_{k=1}^{4 \cdot 2} e^{-\frac{0,1255k}{4}} = \frac{1 - e^{-0,1255 \cdot 2}}{\frac{0,1255}{4} - 1} = 6,965.$$

$$P_C(2) = 1000e^{-0,251} + 200 \cdot 6,965 = 2171 \text{ руб.}$$

По облигации номинально будет получено $V + mnC = 1000 + 4 \cdot 2 \cdot 200 = 2600$ руб.