МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Белгородский государственный технологический университет
им. В. Г. Шухова

Гавриловская С.П.

Экономико-математическое моделирование производственных систем

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения
с применением дистанционных технологий
направления подготовки 080100 Экономика

Белгород
2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Производственные системы: понятие и закономерности

Системой называют совокупность взаимосвязанных элементов, предназначенную для достижения определенной цели. Система находится в постоянном взаимодействии с внешней средой, которая представляет собой совокупность всех объектов, изменение свойств которых влияет на систему, а также тех объектов, чьи свойства меняются в результате поведения системы.

Существование и функционирование систем обусловлено рядом закономерностей: целостностью, интегративностью, коммуникативностью, иерархичностью, осуществляемостью и др.

К числу особенностей экономических (производственных) систем можно отнести

– нестационарность (изменчивость) отдельных параметров системы и стохастичность ее поведения;

– уникальность и непредсказуемость поведения системы в конкретных условиях (благодаря наличию у нее активного элемента - человека) и вместе с тем наличие у нее предельных возможностей, определяемых имеющимися ресурсами;

– способность изменять свою структуру и формировать варианты поведения;

– способность противостоять энтропийным (разрушающим систему) тенденциям;

– способность адаптироваться к изменяющимся условиям;

– способность и стремление к целеобразованию, то есть формированию целей внутри системы.

Производственная система представляет собой обособившуюся в результате общественного разделения труда часть производственного процесса, способную самостоятельно или во взаимодействии с другими аналогичными системами удовлетворять те или иные нужды, потребности и запросы потенциальных потребителей с помощью производимых этой системой товаров и услуг.

Возникновение той или иной производственной системы (ПС) обусловлено возникновением или формированием на рынке спроса на продукцию, способную удовлетворить требования покупателей. Следовательно, ПС должна быть приспособлена к длительному удовлетворению покупательского спроса.

Наиболее сложной проблемой, возникающей при определении ПС как объекта стратегического управления, становится проблема вычисления элементов, совокупность и взаимодействие которых создают объективные предпосылки для целеполагания, с одной стороны, и для выбора предпочтительной стратегии достижения долговременных глобальных целей – с другой. Например, укажем, что элементами ПС являются производственные фонды и персонал с последующей их конкретизацией по видам (типам, моделям) оборудования или профессиональным признакам персонала (специальностям, квалификации). Подобное вычленение, однако, еще не позволяет правильно оценить состояние внешней хозяйственной среды для формулирования стратегических целей и определения готовности фирмы к их достижению.

В состав ПС любого уровня иерархии (предприятие, цех, участок, рабочее место) традиционно включают следующие ресурсы:

– технические (особенности производственного оборудования, инвентаря, основных и вспомогательных материалов);

– технологические (гибкость технологических процессов, наличие конкурентоспособных идей, научные заделы);

– кадровые ресурсы (квалификационный, демографический состав работников, их способность адаптироваться к изменению целей ПС);

– пространственные ресурсы (характер производственных помещений, территории предприятия, коммуникаций, возможность расширения);

– ресурсы организационной структуры системы управления (характер и гибкость управляющей системы, скорость прохождения управляющих воздействий);

– информационные (характер информации о самой ПС и внешней среде, возможность ее расширения и повышения достоверности);

– финансовые ресурсы (состояние активов, ликвидность, наличие кредитных линий).

Каждый из указанных видов ресурсов представляет собой совокупность возможностей ПС для достижения своих целей. Это означает, что, имея в своем распоряжении те или иные средства производства (станки, вспомогательное оборудование, сырье и материалы, инструменты и инвентарь), кадры (рабочих соответствующих разрядов, специалистов соответствующей квалификации, научных сотрудников), производственные помещения с определенными характеристиками, дороги, сооружения и прочие ресурсы, ПС способна в той или иной степени удовлетворять изменяющиеся нужды, потребности и запросы потенциальных покупателей.

В результате взаимодействия всех составляющих систему ресурсов получаются новые свойства, которыми каждый отдельный вид ресурса не обладает. Эти свойства обозначаются таким понятием, как эффект целостности системы. Например, нельзя своевременно вывести на нужный сегмент рынка товар, отвечающий его требованиям, не располагает соответствующими ресурсами всех видов: возможностями применяемого оборудования и используемой технологии, квалификационными возможностями кадров и т.п. И, наоборот, каждый отдельный ресурс не может раскрыться полностью вне связи с другими ресурсами: возможности, которыми располагают станки, не могут быть реализованы без соответствующей квалификации работников, без применения соответствующих основных и вспомогательных материалов, без требуемых характеристик производственных помещений.

В рыночной экономике существенную роль играет такой человеческий ресурс, как предпринимательская способность (предприимчивость). Это особый вид ресурса, который приводит в движение, организует взаимодействие всех остальных видов ресурсов ПС.

1.2. Предприятие как открытая производственная система

Современный производственный менеджмент отходит от управленческого рационализма классических школ менеджмента, выражающегося в убеждении, что успех организации определяется, прежде всего, рациональной организацией производства продукции, снижением издержек, развитием специализации, то есть воздействием управления на внутренние факторы производства.

Вместо этого на первое место выдвигается проблема гибкости и адаптивности (приспособления) к постоянным изменениям внешней среды. Последняя характеризуется как совокупность переменных, которые находятся за пределами предприятия и не являются сферой непосредственного воздействия со стороны его менеджмента. Это, прежде всего, те организации и люди, которые связаны с данным предприятием в силу выполняемых им целей и задач: поставщики, потребители, акционеры, кредиторы, конкуренты, профессиональные союзы, торговые организации, общества потребителей, правительственные органы и др.

Кроме того, существует как бы второй ряд факторов внешней среды, которые, не оказывая прямого воздействия на оперативную деятельность организации, предопределяют стратегически важные решения, принимаемые ее менеджментом. Важнейшая роль здесь принадлежит экономическим, политическим, правовым, социально-культурным, технологическим, экологическим, физико-географическим факторам и переменным. Значение факторов внешней среды резко повышается в связи с возрастанием сложности всей системы общественных отношений (социальных, экономических, политических). Именно внешнее окружение диктует стратегию и тактику организаций.

Внутренняя среда каждой организации формируется под воздействием переменных, оказывающих непосредственное влияние на процесс производства продукции, услуг. Это структура предприятия, его культура и ресурсы, в составе которых огромная роль отводится людям, их знаниям, способностям и искусству взаимодействия. Несмотря на то, что эти факторы действуют в границах организаций, они не всегда находятся под прямым контролем менеджмента, так как деятельность организаций зависит от энергетических, информационных и других ресурсов, поступающих извне.

Использование различных подходов к анализу производственного менеджмента позволяет более глубоко познать единство внешней и внутренней среды предприятия. Так, согласно ситуационному подходу к управлению, организационная структура предприятия и ее элементы есть не что иное, как ответ на различные по своей природе воздействия извне. Главным фактором при таком подходе выступает ситуация, то есть конкретный набор обстоятельств, которые оказывают существенное влияние на работу организации в данный период времени. Отсюда вытекает признание важности специфических приемов, помогающих выделять факторы, воздействуя на которые можно эффективно достичь цели.

Новая роль человека как ключевого ресурса потребовала от менеджеров усилий по созданию условий для реализации заложенных в нем потенций к саморазвитию. Отсюда – необходимость внимания к таким факторам, как организационная культура, которая определяется как наличие у всех работающих общих целей, их непосредственное участие в выработке путей достижения этих целей, заинтересованность в обеспечении общих конечных результатов организации, различные формы демократизации управления, участие работающих в прибылях, собственности, управлении, стиль руководства и лидерство. Все это определяет социальную ответственность менеджмента как перед обществом в целом, так и перед отдельными людьми, работающими в организации.

1.3. Особенности и свойства производственных систем

Производственные системы имеют ряд особенностей, которые отличают их от систем других классов. Наиболее существенные из них:

– целенаправленность производственных систем – способность производить необходимую продукцию или оказывать услуги;

– полиструктурность производственных систем – одновременное существование в них взаимопереплетающихся подсистем, где каждый элемент системы одновременно входит в несколько подсистем и функционирует в соответствии с их требованиями;

– открытость производственных систем, проявляющаяся не только в материальном, энергетическом обмене, но и в обмене информацией.

Сложность производственных систем, обусловленная ее основными элементами: трудящиеся, орудия и предметы труда; целенаправленностью, полиструктурностью, открытостью, альтернативностью связей, большим количеством осуществляемых в системе процессов.

Разнообразие производственных систем, которое характеризуется понятиями: специализация, концентрация, пропорциональность отдельных частей системы и подсистем, прямоточность производственных процессов, ритмичность частичных производственных процессов, вид продукции, серийность производства. Эти особенности во взаимосвязи и взаимообусловленности определяют рациональность форм организации производственных систем и их подсистем.

В процессе проектирования и совершенствования производственных систем им придаются определенные свойства. Остановимся на основных.

Результативность – способность создавать продукцию или услуги, необходимые народному хозяйству и населению. Она обеспечивается организацией производственной системы.

Надежность – устойчивое функционирование, способность к локализации в сравнительно небольших частях системы отрицательных последствий стохастических возмущений, происходящих как внутри системы, так и во внешней среде. Надежность системы обеспечивается внутрисистемными резервами, системой управления и кооперацией с другими производственными системами.

Гибкость – возможность приспосабливать производственные системы к изменяющимся условиям внешней среды, прежде всего через улучшение выпускаемой продукции. Обеспечивается свойствами элементов системы и внутрисистемными резервами.

Управляемость – допустимость временного изменения процесса функционирования в желательном направлении под влиянием управляющих воздействий. Обеспечивается внутрисистемными резервами и расчленением системы на относительно независимые подсистемы, а также ограничением размеров системы.

Долговременность – способность производственной системы в течение длительного времени сохранять результативность.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2.1. Возникновение и развитие системных представлений

Экономико-математическое моделирование является неотъемлемой частью любого исследования в области экономики. Бурное развитие математического анализа, исследования операций, теории вероятностей и математической статистики способствовало формированию различного рода моделей экономики.

Почему можно говорить об эффективности применения методов моделирования в этой области? Во-первых, экономические объекты различного уровня (начиная с уровня простого предприятия и кончая макроуровнем – экономикой страны или даже мировой экономикой) можно рассматривать с позиций системного подхода. Во-вторых, такие характеристики поведения экономических систем (изменчивость (динамичность), противоречивость поведения, тенденция к ухудшению характеристик, подверженность воздействию окружающей среды) предопределяют выбор метода их исследования.

За последние 30-40 лет методы моделирования экономики разрабатывались очень интенсивно. Они строились для теоретических целей экономического анализа и для практических целей планирования, управления и прогноза. Содержательно модели экономики объединяют такие основные процессы: производство, планирование, управление, финансы и т.д. Однако в соответствующих моделях всегда упор делается на какой-нибудь один процесс (например, процесс планирования), тогда как все остальные представляются в упрощенном виде.

В различных сферах человеческой деятельности возникли различные подходы и соответствующие методы решения специфических проблем, которые получили различные названия: в военных и экономических вопросах – *«исследование операций»*, в политическом и административном управлении – *«системный подход»*, в философии *«диалектический материализм»*, в прикладных научных исследованиях – *«кибернетика»*. Позже стало ясно, что все эти теоретические и прикладные дисциплины образуют как бы единый поток, «системное движение», которое постепенно оформилось в науку, получившую название «**системный анализ**». Системный анализ использует все средства современных научных исследований – математику, моделирование, вычислительную технику и натурные эксперименты.

Термин "*модель*" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Рассмотрим только такие "модели", которые являются инструментами получения знаний.

Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект – оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте – оригинале.

Под *моделированием* понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Процесс моделирования включает три элемента:

1. субъект (исследователь),
2. объект исследования,
3. модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование – не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования «погружен» в более общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Моделирование – циклический процесс. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития.

2.2. Модели и моделирование. Классификация моделей

Первоначально моделью называли некое вспомогательное средство, объект, который в определенных ситуациях заменял другой объект. Например, манекен в определенном смысле заменяет человека, являясь моделью человеческой фигуры.

Экономико-математические методы следует понимать как инструмент, а экономико-математические модели – как продукт процесса экономико-математического моделирования.

Рассмотрим вопросы классификации экономико-математических методов. Эти методы, как отмечено выше, представляют собой комплекс экономико-математических дисциплин, являющихся сплавом экономики, математики и кибернетики. Поэтому классификация экономико-математических методов сводится к классификации научных дисциплин, входящих в их состав (рис. 1).

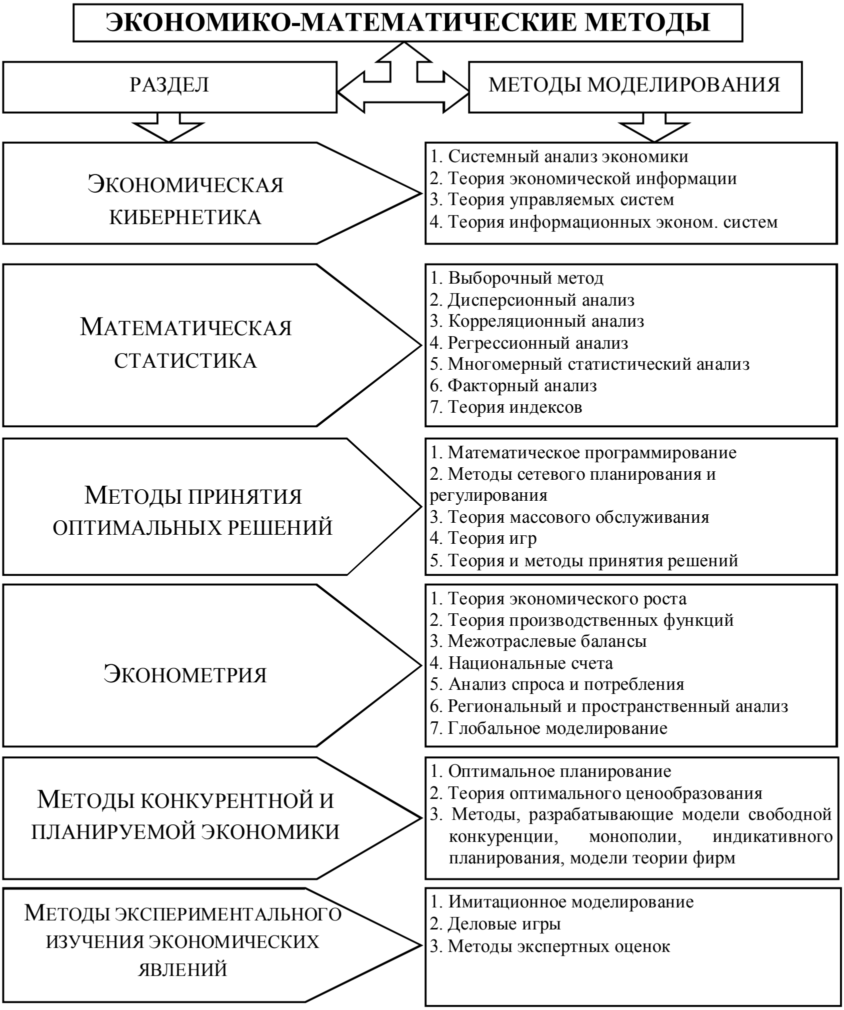


Рис. 1. Классификация экономико-математических методов

Перейдем теперь к вопросам классификации экономико-математических моделей, другими словами, математических моделей социально-экономических систем и процессов. Единой системы классификации таких моделей в настоящее время также не существует, однако обычно выделяют более десяти основных признаков их классификации, или классификационных рубрик (рис. 2).

2.3. Адекватность моделей

Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, будем называть *адекватной* этой цепи. Адекватность означает, что требования полноты, точности и правильности (истинности) модели выполнены не вообще, а лишь в той мере, которая достаточна достижения поставленной цели.

В ряде случаев удается ввести меру адекватности некоторых целей, т.е. указать способ сравнения двух моделей по степени успешности достижения цели с их помощью. Если к тому же есть способ количественно выразить меру адекватности, то задача улучшения модели существенно облегчается. Именно в таких случаях можно количественно ставить, вопросы об идентификации модели т.е. о нахождении в заданном классе моделей наиболее адекватной, об исследовании чувствительности и устойчивости моделей т.е. зависимости меры адекватности модели от ее точности, об адаптации моделей, т.е. подстройке параметров модели с целью повышения ее точности.

Приближенность модели не следует путать с адекватностью. Приближенность модели может быть очень высокой, но во всех случаях модель – это другой объект и различия неизбежны (единственной совершенной моделью любого объекта является сам объект). Величину, меру, степень приемлемости различия можно ввести, только соотнося его с целью моделирования.

2.4. Этапы экономико-математического моделирования

Процесс моделирования, в том числе и экономико-математического, включает в себя три структурных элемента: объект исследования; субъект (исследователь); модель, опосредующую отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом. Рассмотрим общую схему процесса моделирования, состоящую из четырех этапов.

Пусть имеется некоторый объект, который мы хотим исследовать методом моделирования. На первом этапе мы конструируем (или находим в реальном мире) другой объект – модель исходного объекта-оригинала.

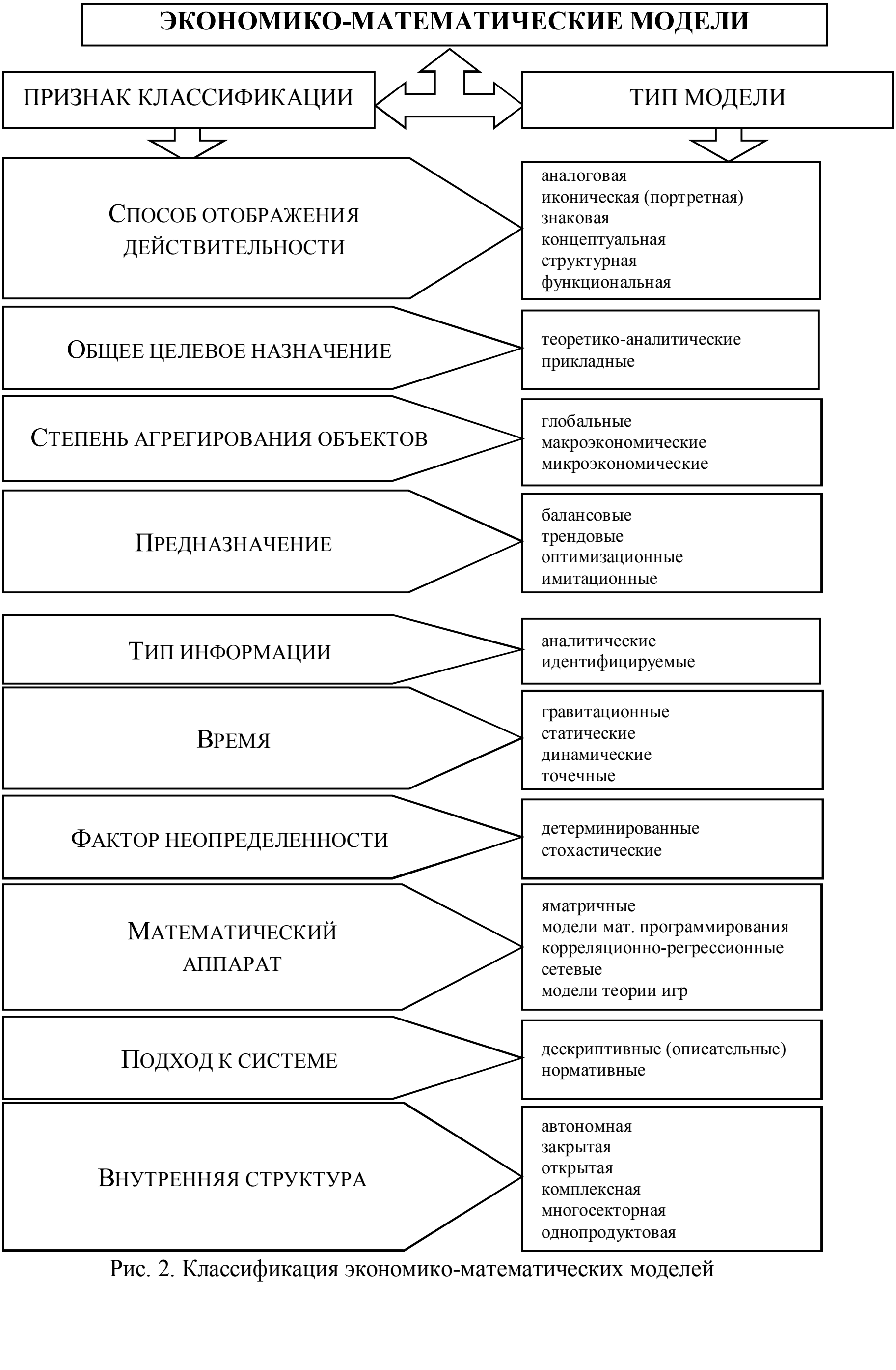


Рис. 2. Классификация экономико-математических моделей

Этап построения модели предполагает наличие определенных сведений об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели определяются тем, что модель отображает лишь некоторые существенные черты исходного объекта, поэтому любая модель замещает оригинал в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько моделей, отражающих определенные стороны исследуемого объекта или характеризующих его с разной степенью детализации.

На в т о р о м э т а п е процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Например, одну из форм такого исследования составляет проведение модельных экспериментов, при которых целенаправленно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее «поведении». Конечным результатом этого этапа является совокупность знаний о модели в отношении существенных сторон объекта-оригинала, которые отражены в данной модели.

Т р е т и й э т а п заключается в переносе знаний с модели на оригинал, в результате чего мы формируем множество знаний об исходном объекте и при этом переходим с языка модели на язык оригинала. С достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал можно лишь в том случае, если этот результат соответствует признакам сходства оригинала и модели (другими словами, признакам адекватности).

На ч е т в е р т о м э т а п е осуществляются практическая проверка полученных с помощью модели знаний и их использование как для построения обобщающей теории реального объекта, так и для его целенаправленного преобразования или управления им. В итоге мы снова возвращаемся к проблематике объекта-оригинала.

Моделирование представляет собой циклический процесс, т.е. за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а первоначально построенная модель постепенно совершенствуется. Таким образом, в методологии моделирования заложены большие возможности самосовершенствования.

Перейдем теперь непосредственно к процессу экономико-математического моделирования, т.е. описания экономических и социальных систем и процессов в виде экономико-математических моделей. Эта разновидность моделирования обладает рядом существенных особенностей, связанных как с объектом моделирования, так и с применяемыми аппаратом и средствами моделирования. Поэтому целесообразно более детально проанализировать последовательность и содержание этапов экономико-математического моделирования (рис. 3)

Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ 1	формулирование сущности проблемы, принимаемые предпосылки и допущения, выделение важнейших черт и свойств моделируемого объекта, изучение его структуры и взаимосвязь его элементов, предварительное формулирование гипотезы, объясняющие поведение и развитие объекта
Построение математической модели 2	формализация экономической проблемы (выражения ее в виде конкретных математических зависимостей) построение модели – этапы: 1. определение типа экономико-математической модели 2. изучение возможности ее применения в данной задаче 3. уточнение конкретного перечня переменных и параметров и форм связей
Математический анализ модели 3	чисто математическими приемами исследования выявляются общие свойства модели и ее решений доказательство существования решения сформулированной задачи. *при аналитическом исследовании* выясняется, единственно ли решение, какие переменные могут входить в решение, в каких пре делах они изменяются, каковы тенденции их изменения и т. д. (для сложных моделей переходят к численным методам исследования)
Подготовка исходной информации 4	наиболее трудоемкий этап моделирования в процессе подготовки информации используются методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики для организации выборочных обследований, оценки достоверности данных и т.д. при системном экономико-математическом моделировании результаты функционирования одних моделей служат исходной информацией для других.
Численное решение 5	разработка алгоритмов численного решения задачи, подготовку программ на ЭВМ и непосредственное проведение расчетов Обычно расчеты на основе экономико-математической модели носят многовариантный характер. Численное решение существенно дополняет результаты аналитического исследования, а для многих моделей является единственно возможным.
Анализ численных результатов и их применение 6	решается вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели (проверка адекватности модели по тем свойствам, которые выбраны в качестве существенных).

Перечисленные этапы экономико-математического моделирования находятся в тесной взаимосвязи, в частности, могут иметь место возвратные связи этапов. Так, на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи или противоречива, или приводит к слишком сложной: математической модели; в этом случае исходная постановка задачи должна быть скорректирована. Наиболее часто необходимость возврата к предшествующим этапам моделирования возникает на этапе подготовки исходной информации. Если необходимая информация отсутствует или затраты на ее подготовку слишком велики, приходится возвращаться к этапам постановки задачи и ее формализации, чтобы приспособиться к доступной исследователю информации.

Выше уже сказано о циклическом характере процесса моделирования. Недостатки, которые не удается исправить на тех или иных этапах моделирования, устраняются в последующих циклах. Однако результаты каждого цикла имеют и вполне самостоятельное значение. Начав исследование с построения простой модели, можно получить полезные результаты, а затем перейти к созданию более сложной и более совершенной модели, включающей в себя новые условия и более точные математические зависимости.

Конечно же, современное исследование невозможно без применения современных информационных технологий и компьютерной техники.

В настоящее время математические модели применяются для анализа, прогнозирования и выбора оптимальных решений в различных областях экономики. Это планирование и оперативное управление производством, управление трудовыми ресурсами, управление запасами, распределение ресурсов, планировка и размещение объектов, руководство проектом, распределение инвестиций и т.п.

3. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В УПРАВЛЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Практически любая задача хозяйственной деятельности предприятия связана с поиском наилучшего (оптимального) варианта решения. А для реализации поставленной задачи на предприятии используют различные ресурсы, которые, как правило, ограничены. Рациональное и сбалансированное их использование всегда позволяет не только достичь поставленных целей и сформулированных задач, но и оставаться предприятию конкурентным и рентабельным. Каждая конкретная задача формулируется по-разному, но обычно сводится к максимизации дохода (прибыли) или минимизации затрат на производство того или иного продукта.

Оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений. В самом общем виде задача математически записывается так:

$$U = f(X) \rightarrow \max;\ X \in W,$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$; W – область допустимых значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$; $f(X)$ – целевая функция.

Для того чтобы решить задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение, т. е. указать $X_0 \in W$ такое, что $f(X_0) \geq f(X)$ при любом $X \in W$, или для случая минимизации – $f(X_0) \leq f(X)$ при любом $X \in W$. Оптимизационная задача является *неразрешимой*, если она не имеет оптимального решения. Методы решения оптимизационных задач зависят как от вида целевой функции $f(X)$, так и от строения допустимого множества W. Если целевая функция в задаче является функцией n переменных, то методы решения называют методами математического программирования.

Линейное программирование – наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования, изучающий методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих **систему ограничений**, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется **допустимым планом** задачи линейного программирования. Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется **целевой функцией задачи**. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется **оптимальным планом задачи**.

Задачей линейного программирования является поиск наиболее выгодного (оптимального) плана из множества возможных альтернатив.

В качестве примеров задач оптимизации, к которым может быть применен инструмент линейного программирования, можно назвать следующие: определение ассортимента продукции; использование мощностей оборудования; минимизация дисбаланса на линии сборки; задача составления кормовой смеси (или задача о диете); задача составления жидких смесей; задача о раскрое или о минимизации обрезков; транспортная задача.

Рассмотрим способы решения задач линейного программирования на примере задачи *определения ассортимента продукции*.

3.1. Общий вид задачи оптимального распределения ресурсов

В общем случае *задача оптимального распределения ресурсов* формулируется следующим образом. Предприятие распоряжается ресурсами различных типов. Среди таких ресурсов могут быть материально-вещественные, энергетические, трудовые, технические, финансовые и другие. Пусть в общем виде на предприятии для анализа используются m видов ресурсов. Пронумеруем все виды ресурсов числами от 1 до m, буквой i будем обозначать номер вида ресурса. Таким образом, i удовлетворяет неравенству $1 \le i \le m$. Заметим, что ресурсы разных видов могут измеряться в различных единицах (тоннах, кубометрах, человеко-часах, рублях, штуках и др.).

В течение планового периода предприятие обладает некоторыми доступными объемами ресурса каждого вида. Объем ресурса i-го вида обозначим посредством b_i.

Из этих ресурсов предприятие способно изготавливать различную продукцию. Обозначим буквой n общее число видов продукции, которые может выпустить предприятие из имеющихся ресурсов. Занумеруем все виды продукции числами от 1 до n. Буквой j будем обозначать номер вида продукции, так что выполняется неравенство $1 \le j \le n$. Обозначим через c_j цену, по которой предприятие реализует каждую единицу продукции j-го вида. Производство продукции требует затрат ресурсов. Объем затрат зависит от вида ресурса, вида продукции и количества единиц продукции. Обозначим посредством a_{ij} норму затрат ресурса i-го вида на производство продукции j-го вида.

Задача оптимального использования ресурсов, задача производственного планирования, состоит в том, чтобы определить, какую продукцию и в каком объеме следует изготовить предприятию из имеющихся ресурсов с тем, чтобы доход от реализации продукции был наибольшим.

Построим ***математическую модель*** задачи. Сначала введем переменные. Посредством x_j обозначим искомый объем выпуска продукции j-го вида. Математическую модель можно теперь записать в следующей форме:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

Верхняя строка записи говорит о максимизации **целевой функции**. Экономическая задача поиска плана производства продукции, дающего наибольший доход, превращается в математическую задачу поиска максимального значения целевой функции от n переменных при условии, что значения этих переменных подчинены системе ограничений, имеющих форму неравенств.

Всякий набор значений переменных (x_1, x_2, ..., x_n) называется **планом** задачи. Те планы, которые удовлетворяют системе ограничений, называются **допустимыми планами**. **Оптимальным планом** называется тот из допустимых планов, который дает наибольшее значение целевой функции среди всех ее значений на допустимых планах. Само это наибольшее значение целевой функции, т. е. значение целевой функции на оптимальном плане, называется **оптимумом** задачи.

Решить задачу производственного планирования – это найти оптимальный план и оптимум для ее математической модели.

3.2. Графика линейного программирования

Рассмотрим вопрос о решении задач линейного программирования. Подчеркнем, что на стадии решения задачи ее экономический смысл отступает на второй план. Можно даже вовсе не знать, из какой конкретной экономической ситуации возникла та или иная математическая модель. Решение задачи – это чисто математическая процедура. Однако, чтобы, получив результаты решения, воспользоваться ими, нужно, конечно, вернуться к экономическому содержанию задачи, сопоставить полученные результаты с конкретными экономическими условиями.

Рассмотрим сначала метод решения относительно простых задач, *задач с двумя переменными.* Всякую задачу линейного программирования можно привести к стандартной форме. Рассмотрим задачу с двумя переменными следующего вида

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

Планы такой задачи – это пары чисел (x_1, x_2). Им соответствуют точки координатной плоскости (рис. 1).

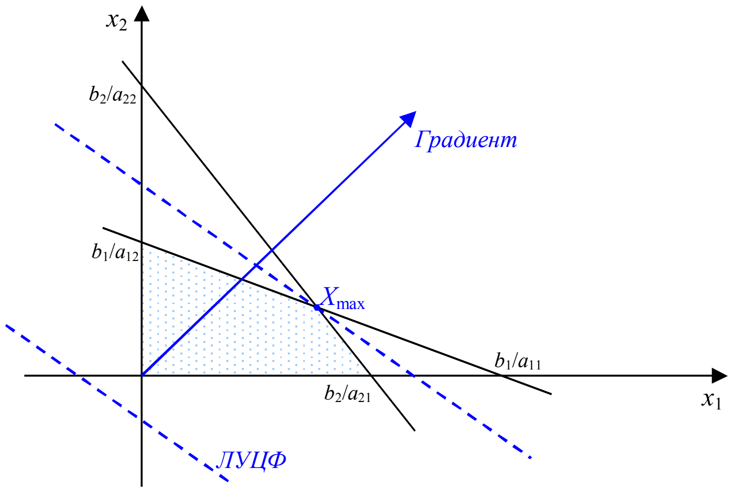


Рис. 3. Ограниченная область допустимых планов

Рассмотрим систему ограничений. Возьмем одно из неравенств системы $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$.

Множество решений неравенства, т. е. множество пар (x_1, x_2), компоненты которых удовлетворяют неравенству, геометрически представляет собой полуплоскость. Для того чтобы определить граничную прямую этой полуплоскости, следует заменить знак неравенства знаком равенства: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ и построить прямую (для этого достаточно найти две точки). Построенная прямая разделит плоскость на две части, т. е. определит две полуплоскости. Выбрать полуплоскость, удовлетворяющую знаку неравенства. Каждое из неравенств системы ограничений определит свою полуплоскость. Последние неравенства, требующие неотрицательности значений переменных, определяют правую и верхнюю полуплоскости, граничными прямыми которых являются координатные оси.

Множеством решений системы неравенств в целом является пересечение всех полуплоскостей, соответствующих отдельным неравенствам системы. Это пересечение и определяет множество допустимых планов. Это множество часто называют также ***областью допустимых планов***. В типичной, наиболее часто встречающейся ситуации, множество допустимых планов представляет собой ограниченную выпуклую многоугольную область – выпуклый многоугольник, расположенный в первой координатной четверти. Но возможны и другие варианты.

Как найти оптимальный план? Обратимся к целевой функции. Приравняем ее к какой-нибудь константе d: $c_1x_1 + c_2x_2 = d$.

Мы получили уравнение, определяющее прямую на координатной плоскости. Все точки этой прямой соответствуют одному и тому же значению целевой функции, равному d, одному и тому же уровню значений. Такая прямая называется ***линией уровня*** целевой функции (ЛУЦФ).

При изменении величины d мы получим другую линию уровня, параллельную предыдущей. При увеличении d линия будет смещаться параллельно в одну сторону, при уменьшении – в другую. При изменении константы d получаем различные прямые, параллельные друг другу. При увеличении d прямая уровня перемещается в направлении наискорейшего возрастания функции F, т.е. в направлении ее градиента. Вектор градиента

$$\operatorname{grad} F = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\} = \{c_1; c_2\}.$$

Вектор-градиент перпендикулярен всем линиям уровня целевой функции, а его направление указывает направление роста значений функции. На рис. 1 изображен градиент, направленный внутрь первого координатного угла. Это означает, что коэффициенты c_1 и c_2 положительны. Разумеется, это не во всех задачах так, в разных задачах знаки этих коэффициентов могут быть различными. Начало градиента всегда располагается в начале координат, но направлен он может быть в любую сторону. Для того чтобы найти оптимальный план, нужно взять одну из линий уровня, пересекающих область допустимых планов. Затем следует параллельно смещать эту линию в направлении градиента до отрыва от области допустимых планов. Крайним называется положение линии уровня, удовлетворяющее двум условиям: во-первых, в этом положении линия уровня еще пересекает область допустимых планов, во-вторых, при любом ее дальнейшем смещении она перестает пересекать эту область.

Точки области допустимых планов, лежащие на одной линии уровня, соответствуют одному и тому же допустимому значению целевой функции. Смещение линии уровня в направлении градиента соответствует росту значений целевой функции. *Крайнее положение линии уровня соответствует максимальному допустимому значению целевой функции, т. е. оптимуму*. Все точки, находящиеся в пересечении области допустимых планов и линии уровня в ее крайнем положении, являются искомыми оптимальными планами. На рис. 1 множество оптимальных планов состоит из одной единственной точки – вершины многоугольника, обозначенной посредством $X_{\max}$.

Условия разрешимости задачи и единственности решения

Для обоснования методов решения задач линейного программирования сформулируем ряд важнейших теорем, подтверждая их справедливость дальнейшими геометрическими построениями и опуская аналитические доказательства этих теорем.

Вначале дадим некоторые определения.

Определение 1. Множество точек называется выпуклым, если вместе с его любыми двумя точками ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий их. На рис. 4,*а* изображено выпуклое множество (выпуклый многоугольник), а на рис. 4,*б* – невыпуклое.

Определение 2. Пересечение конечного числа выпуклых множеств также выпуклое множество.

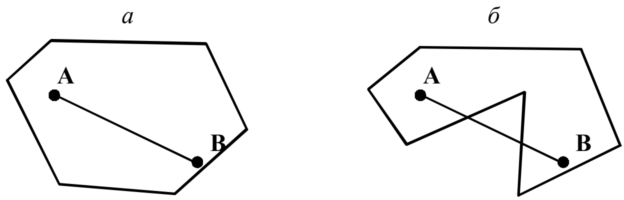


Рис. 4. Множество точек: *а* – выпуклое; *б* – невыпуклое

Определение 3. Точка выпуклого множества называется угловой (или крайней), если через неё нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек данного множества и для которого она была бы внутренней.

Для выпуклого многоугольника угловыми точками являются все его вершины. В пространстве выпуклое множество с конечным числом угловых точек называется выпуклым многогранником.

Утверждение 1. Множеством решений системы m линейных неравенств с n переменными является выпуклый многогранник в n-мерном пространстве (исключая случай, когда система несовместна).

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым. Ранее говорилось, что ограничениями любой задачи линейного программирования являются либо система линейных уравнений, либо система линейных неравенств. Совокупность решений таких систем при условии их совместности образует выпуклые множества с конечным числом угловых точек. В частном случае, когда в систему ограничений – неравенств входят только две переменные x_1 и x_2, это множество можно изобразить на плоскости.

Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает с одной (двумя) из угловых точек множества допустимых решений.

Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка области допустимых решений системы ограничений, и наоборот.

Таким образом, если область допустимых планов непустая и ограниченная, то для каждой из задач – на максимум целевой функции или на минимум целевой функции, существует оптимальный план (рис. 5,*а*). Если же область неограничена, то дело обстоит по-иному. В этом случае одна из задач (на максимум или на минимум целевой функции) или обе эти задачи могут оказаться неразрешимыми (рис. 5,*б*). Если область пуста – решения задачи нет (рис. 5,*в*).

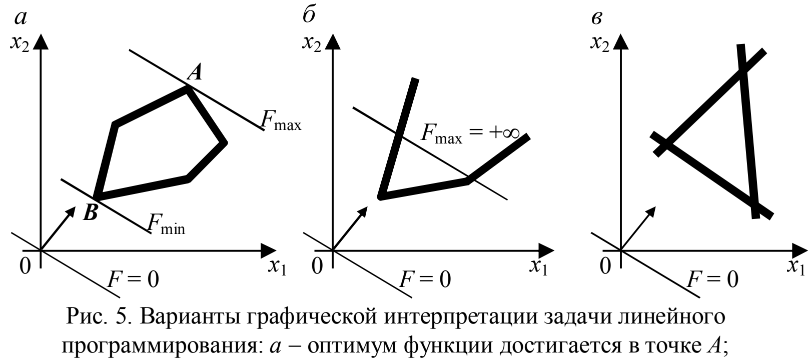


Рис. 5. Варианты графической интерпретации задачи линейного программирования: *а* – оптимум функции достигается в точке A; *б* – оптимум функции F недостижим; *в* – пустая область допустимых планов

Мы рассмотрели геометрический смысл задачи с двумя переменными. Для задач с тремя переменными можно провести аналогичное рассуждение. Вместо полуплоскостей с граничной прямой нужно будет рассматривать полупространства с граничными плоскостями. Вместо многоугольной области на плоскости – многогранную область в пространстве. Вместе линии уровня на плоскости – плоскость уровня в пространстве. Представление ситуации будет менее наглядным.

Для задач с большим числом переменных наглядность и вовсе будет утрачена. Графический метод решения для таких задач оказывается непригодным. Необходимо использовать уже другие, не геометрические, а аналитические, расчетные методы.

3.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Симплекс-метод является основным в линейном программировании. Решение задачи начинается с рассмотрений одной из вершин многогранника условий. Если исследуемая вершина не соответствует максимуму (минимуму), то переходят к соседней, увеличивая значение функции цели при решении задачи на максимум и уменьшая при решении задачи на минимум. Таким образом, переход от одной вершины к другой улучшает значение функции цели. Так как число вершин многогранника ограничено, то за конечное число шагов гарантируется нахождение оптимального значения или установление того факта, что задача неразрешима.

Этот метод является универсальным, применимым к любой задаче линейного программирования в **канонической форме**. Система ограничений здесь – система линейных уравнений, в которой количество неизвестных больше количества уравнений. Если ранг системы равен r, то мы можем выбрать r неизвестных, которые выразим через остальные неизвестные. Для определенности предположим, что выбраны первые, идущие подряд, неизвестные x_1, x_2, …, x_r. Тогда наша система уравнений может быть записана как

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + a_{1\gamma+1}x_{\gamma+1} + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 + a_{2\gamma+1}x_{\gamma+1} + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r + a_{r\gamma+1}x_{\gamma+1} + \ldots + a_{rn}x_n. \end{cases}$$

К такому виду можно привести любую совместную систему, например, методом Гаусса. Правда, не всегда можно выражать через остальные первые r неизвестных (мы это сделали для определенности записи). Однако такие r неизвестных обязательно найдутся. Эти неизвестные (переменные) называются **базисными**, остальные **свободными**.

Придавая определенные значения свободным переменным, и вычисляя значения базисных (выраженных через свободные), мы будем получать различные решения нашей системы ограничений. Таким образом, можно получить любое ее решение. Нас будут интересовать особые решения, получаемые в случае, когда свободные переменные равны нулю. Такие **решения** называются **базисными**, их столько же, сколько различных базисных видов у данной системы ограничений. Базисное решение называется **допустимым базисным решением** или **опорным решением**, если в нем значения переменных неотрицательны. Если в качестве базисных взяты переменные x_1, x_2, …, x_r, то решение $\{b_1, b_2, \dots, b_r, 0, \dots, 0\}$ будет опорным при условии, что $b_1, b_2, \dots, b_r \geq 0$.

Симплекс-метод основан на теореме, которая называется **фундаментальной теоремой симплекс-метода**. Среди оптимальных планов задачи линейного программирования в канонической форме обязательно есть опорное решение ее системы ограничений. Если оптимальный план задачи единственен, то он совпадает с некоторым опорным решением. Различных опорных решений системы ограничений конечное число. Поэтому решение задачи в канонической форме можно было бы искать перебором опорных решений и выбором среди них того, для которого значение F самое большое. Но, во-первых, все опорные решения неизвестны и их нужно находить, а, во-вторых, в реальных задачах этих решений очень много и прямой перебор вряд ли возможен. Симплекс-метод представляет собой некоторую процедуру направленного перебора опорных решений. Исходя из некоторого, найденного заранее опорного решения по определенному алгоритму симплекс-метода мы подсчитываем новое опорное решение, на котором значение целевой функции F не меньше, чем на старом. После ряда шагов мы приходим к опорному решению, которое является оптимальным планом.

Итак, симплексный метод вносит определенный порядок как при нахождении первого (исходного) базисного решения, так и при переходе к другим базисным решениям. Его идея состоит в следующем.

Имея ***систему ограничений***, приведенную к общему виду, т. е. к системе m линейных уравнений с n переменными ($m < n$), находят ***любое базисное решение*** этой системы, заботясь только о том, чтобы найти его как можно проще.

Если *первое же найденное базисное решение оказалось* ***допустимым***, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то, осуществляется переход к другому, обязательно допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма, если и не достигнет оптимума, то приблизится к нему. С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Если первое найденное базисное решение окажется *недопустимым*, то с помощью симплексного метода осуществляется переход к другим базисным решениям, которые приближают нас к области допустимых решений, пока на каком-то шаге решения, либо базисное решение окажется допустимым и к нему применяют алгоритм симплексного метода, либо мы убеждаемся в противоречивости системы ограничений.

Таким образом, применение симплексного метода распадается на два этапа: нахождение допустимого базисного решения системы ограничений или установление факта ее несовместности; нахождение оптимального решения. При этом каждый этап может включать несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Но так как число базисных решений всегда ограниченно, то ограниченно и число шагов симплексного метода.

Признак оптимальности решения заключается в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Если для некоторого вектора, не входящего в базис, выполняется условие

$$\Delta_j = f_j - c_j < 0, \text{ где } f_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \text{ , } 1 \le j \le \text{n},$$

то можно получить новый опорный план, для которого значение целевой функции будет больше исходного; при этом могут быть два случая:

а) если все координаты вектора, подлежащего вводу в базис, отрицательны, то задача линейного программирования не имеет решения;

б) если имеется хотя бы одна положительная координата у вектора, подлежащего вводу в базис, то можно получить новый опорный план.

Теорема 2. Если для всех векторов выполняется условие $\Delta_j = f_j - c_j \ge 0$, то полученный план является оптимальным.

Вычисления по симплекс-методу организуются в виде ***симплекс-таблиц***, которые являются сокращенной записью задачи линейного программирования в канонической форме. Перед составлением симплекс-таблицы задача должна быть преобразована, система ограничений приведена к допустимому базисному виду, с помощью которого из целевой функции должны быть исключены базисные переменные. Вопрос об этих предварительных преобразованиях мы рассмотрим ниже.

Сейчас же будем считать, что они уже выполнены и задача имеет вид:

$$Z = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_n x_n \to \max, \min,$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1' + a_{1r+1}' x_{r+1} + \ldots + a_{1n}' x_n, \\ x_2 = b_2' + a_{2r+1}' x_{\gamma+1} + \ldots + a_{2n}' x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r' + a_{rr+1}' x_{r+1} + \ldots + a_{rn}' x_n, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь для определенности записи считается, что в качестве базисных переменных можно взять переменные x_1, x_2, …, x_r и что при этом $b_1, b_2, \ldots, b_r \ge 0$ (соответствующее базисное решение является опорным).

Для составления симплекс-таблицы во всех равенствах в условии задачи члены, содержащие переменные, переносятся в левую часть, свободные оставляются справа, т.е. задача записывается в виде системы равенств:

$$\begin{cases} x_1 - a_{1r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{1n}' x_n = b_1', \\ x_2 - a_{2r+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{2n}' x_n = b_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r - a_{rr+1}' x_{r+1} - \ldots - a_{rn}' x_n = b_r', \\ Z - \gamma_{r+1} x_{r+1} - \ldots - \gamma_n x_n = \gamma_0. \end{cases}$$

Далее эта система оформляется в виде симплекс-таблиц:

Базисн. перем.	Своб. члены	x_1	x_2	…	…	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	…	…	…	x_n
x_1	b_1'	1	0	…	…	0	$-a_{1r+1}$	$-a_{1r+2}$	…	…	…	$-a_{1n}$
x_2	b_2'	0	1	…	…	0	$-a_{2r+1}$	$-a_{2r+2}$	…	…	…	$-a_{1n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	b_r'	0	0	…	…	1	$-a_{rr+1}$	$-a_{rr+2}$	…	…	…	$-a_{rn}$
F	γ_0	0	0	…	…	0	$-\gamma_{r+1}$	$-\gamma_{r+2}$	…	…	…	$-\gamma_n$

Примечание. Названия базисных переменных здесь взяты лишь для определенности записи и в реальной таблице могут оказаться другими.

Порядок работы с симплекс таблицей

Первая симплекс-таблица подвергается преобразованию, суть которого заключается в переходе к новому опорному решению.

Алгоритм перехода к следующей таблице такой:

– просматривается **последняя строка** (индексная) таблицы и среди коэффициентов этой строки (исключая столбец свободных членов) выбирается наименьшее отрицательное число при отыскании **max**, либо наибольшее положительное при задачи на **min**. Если такового нет, то исходное базисное решение является оптимальным и данная таблица является последней;

– просматривается **столбец таблицы**, отвечающий выбранному отрицательному коэффициенту в последней строке – ключевой столбец ($j = k$), и в этом столбце выбираются **положительные коэффициенты**. *Если таковых нет, то целевая функция неограниченна на области допустимых значений переменных и задача решений не имеет*;

– среди выбранных коэффициентов столбца выбирается тот, для которого абсолютная величина отношения соответствующего свободного члена (находящегося в столбце свободных членов) к этому элементу минимальна. Этот коэффициент называется **разрешающим**, а строка в которой он находится **ключевой**;

– в дальнейшем **базисная переменная**, отвечающая строке разрешающего элемента, должна быть переведена в разряд свободных, а **свободная переменная**, отвечающая столбцу разрешающего элемента, вводится в число базисных.

– строится новая таблица, содержащая новые названия базисных переменных: **строка разрешающего элемента делится** на этот элемент и полученная строка записывается в новую таблицу на то же место $a'_{rj} = \dfrac{a_{rj}}{a_{rk}}$, $1 \le j \le n$; в новой таблице **все** элементы ключевого столбца равны 0, кроме разрезающего, он всегда равен 1; **столбец**, у которого в ключевой строке имеется 0, в новой таблице будет таким же; **строка**, у которой в ключевом столбце имеется 0, в новой таблице будет такой же; в **остальные** клетки новой таблицы записывается результат преобразования элементов старой таблицы $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}}{a_{rk}}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

В результате получают новую симплекс-таблицу, отвечающую новому базисному решению.

Теперь следует просмотреть строку целевой функции, если в ней нет отрицательных значений (в задачи на нахождение максимального значения), то значит, что **оптимальное решение получено**. В противном случае переходим к новой симплекс таблице по выше описанному алгоритму.

3.4. Практический пример планирования и анализа рационального использования средств

Для выпуска двух видов продукции требуются затраты электроэнергии, сырья и оборудования. Нормы затрат ресурсов на производство единицы продукции каждого вида, цена единицы продукции каждого вида, а также запасы ресурсов, которые могут быть использованы предприятием, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ресурс	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции		Запасы ресурсов
	Продукт *A*	Продукт *B*	
Электроэнергия	3	7	29
Сырье	3	1	18
Оборудование	1	6	23
Цена единицы продукции	15	10	

1. Сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования.

2. Построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом.

3. Привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

4. Решить задачу линейного программирования в MS Excel и выполнить анализ полученных результатов.

Решение:

1. Обозначим через x_1 и x_2 количество продукции *A* и *B*, которую планируется произвести в планируемом периоде. Тогда общая стоимость выпущенной продукции составит $F = c_1x_1 + c_2x_2 = 15x_1 + 10x_2$. Необходимо найти такие значения x_1 и x_2, чтобы величина F была максимальной, т.е. $F \to \max$.

Можно утверждать, что переменные x_1, x_2 не могут принимать произвольных значений, так как их значения ограничены условиями производства продукции. А именно тем, что предприятие располагает ограниченными запасами ресурсов. На изготовление продукции *A* необходимо израсходовать $a_{11}x_1 = 3x_1$ единиц электроэнергии, а на изготовление продукции *B* – $a_{12}x_2 = 7x_2$ единиц. Поскольку запас электроэнергии не превышает $b_1 = 29$ единиц, то величины x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенству $3x_1 + 7x_2 \le 29$. Аналогично можно получить неравенство ресурса сырье – $3x_1 + x_2 \le 18$, а также для ресурса оборудование – $x_1 + 6x_2 \le 23$. Кроме того, величины x_1, x_2 не могут быть отрицательными, т.е. $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$.

Таким образом, задача заключается в нахождении точки максимума функции F среди точек с координатами $(x_1; x_2)$, которые удовлетворяют указанным неравенствам. Запишем сформулированную задачу линейного программирования следующим образом:

$$F = 15x_1 + 10x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 29, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + 6x_2 \le 23, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. Для сформулированной модели каждую совокупность значений переменных $(x_1; x_2)$ можно изобразить точкой на плоскости, если ввести систему координат и по одной оси откладывать значение x_1, а по другой – x_2.

Остановимся на геометрической интерпретации совокупности решений одного отдельно взятого неравенства, описывающего расход электроэнергии $3x_1 + 7x_2 \le 29$.

Рассмотрим прямую на плоскости, представленную уравнением $3x_1 + 7x_2 = 29$. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых справедливо неравенство, а в другой – противоположное. Для того, чтобы проверить, какая из полуплоскостей состоит из решений нашего неравенства, следует взять точку из какой-либо полуплоскости и проверить, выполняется ли оно в этой точке. Множество решений отдельно взятого линейного неравенства представляет собой полуплоскость. Для системы из нескольких таких неравенств точки, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам одновременно, должны находиться во всех соответствующих полуплоскостях, т.е. принадлежать теоретико-множественному пересечению этих полуплоскостей. Множество точек на плоскости, удовлетворяющих системе ограничений, составит некоторую выпуклую многоугольную область. Условия неотрицательности переменных x_1, $x_2 \ge 0$ приводят к тому, что эта область находится в первой координатной четверти.

Построенное на плоскости множество решений системы неравенств сформулированной задачи представлено на рис. 6.

Любая точка данного многоугольника удовлетворяет всем ограничениям задачи и соответствует допустимому плану. Если при этом точка лежит на стороне пятиугольника, то ее координаты, подставленные в левую часть ограничения-неравенства, обращают ограничение в равенство. И такое ограничение называется *связанным*.

Данная ситуация означает, что реализация плана требует полного использования соответствующего ресурса.

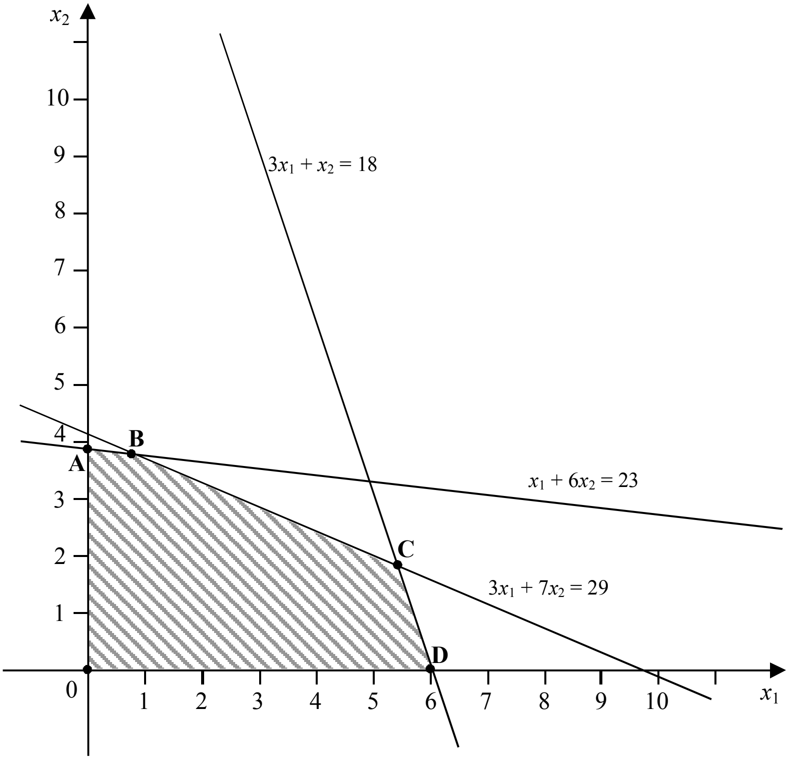


Рис. 6. Многоугольник допустимых планов

Точка, лежащая в одной из вершин многоугольника, обращает в равенство сразу два ограничения и соответствует полному использованию сразу двух ресурсов. Точка, лежащая вне многоугольника, не удовлетворяет хотя бы одному ограничению. Графики позволяют не просто констатировать недопустимость такой внешней точки, но и определить, каким именно ограничениям она не удовлетворяет, каких именно ресурсов не хватает для реализации плана. Вся внешняя область разбивается на многоугольники, точки которых не удовлетворяют тем или иным ограничениям.

Точки, удовлетворяющие всем ограничениям – это точки нашего многоугольника. Его границы соответствуют сырьевым ресурсам.

Построение области допустимых планов использует лишь систему ограничений. Для определения оптимального плана необходимо привлечь целевую функцию. Однако кое-что про оптимальный план можно сказать уже сейчас.

Во-первых, область допустимых планов непуста и ограничена. Следовательно, оптимальный план существует.

Во-вторых, оптимальным планом наверняка окажется одна из вершин многоугольника. Если оптимальный план у нашей задачи единствен, то этим планом будет одна вершина. Если же он не единствен, то этим оптимальным планом окажутся две соседние вершины, а вместе с ними и все точки стороны шестиугольника.

Определение оптимального плана методом перебора вершин

Для нахождения оптимального плана необходимо найти координаты вершин многоугольника *OABCD* допустимых планов, подставить значение x_1 и x_2 в целевую функцию и найти максимальное значение целевой функции F.

Координаты вершины O – (0; 0). Подставим значение x_1 и x_2 в целевую функцию и получим $F = 15 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$.

Координаты вершины A – (0; 3,83). Подставим значение x_1 и x_2 в целевую функцию и получим $F = 15 \cdot 0 + 10 \cdot 3{,}83 = 38{,}3$.

Координаты вершины B определяются из системы уравнений, связывающей ресурсы *Электроэнергия* и *Оборудование*:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 29, \\ x_1 + 6x_2 = 23. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получаем координаты вершины – (1,18; 3,64). Подставим значение x_1 и x_2 в целевую функцию и получим $F = 15 \cdot 1{,}18 + 10 \cdot 3{,}64 = 54{,}1$.

Координаты вершины C определяются из системы уравнений, связывающей ресурсы *Электроэнергия* и *Сырье*:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 29, \\ 3x_1 + x_2 = 18. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получаем координаты вершины – (5,39; 1,83). Подставим значение x_1 и x_2 в целевую функцию и получим $F = 15 \cdot 5{,}39 + 10 \cdot 1{,}83 = 99{,}15$.

Координаты вершины D – (6; 0). Подставим значение x_1 и x_2 в целевую функцию и получим $F = 15 \cdot 6 + 10 \cdot 0 = 90$.

Максимальное значение целевой функции, равное 99,15, достигается в вершине C с координатами (5,39; 1,83). Т.е. для получения наибольшей стоимости выпущенной продукции, равной 99,15 денежных единиц, предприятие должно выпустить 5,39 единиц продукта A и 1,83 единиц продукта B.

Построение градиента и определение оптимального плана

Обратимся к целевой функции. Ее градиент есть вектор $\operatorname{grad} Z = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\} = \left\{ \frac{\partial (15x_1 + 10x_2)}{\partial x_1}; \frac{\partial (15x_1 + 10x_2)}{\partial x_2} \right\} =$ (15; 10). Для решения задачи следует изобразить этот вектор в виде стрелки с началом в точке (0; 0) и концом в точке (15; 10), а также учесть ее направление. Целевая функция задачи геометрически изображается с помощью прямой уровня, т.е. прямой, на которой $F = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает постоянное значение, равное C. Если C – произвольная константа, то уравнение прямой уровня имеет вид $c_1x_1 + c_2x_2 = C$. Все линии уровня целевой функции параллельны друг другу и перпендикулярны градиенту.

На рис. 7 пунктиром изображены линии уровня целевой функции (*ЛУЦФ*), соответствующие различным значениям целевой функции. Точкой минимума функции F будет точка первого касания линии уровня с областью допустимых планов. Точкой максимума – точка отрыва линии уровня от допустимого многоугольника.

Эти точки чаще всего совпадают с некоторыми вершинами допустимого многоугольника, хотя их может быть и бесчисленное множество, если линия уровня F параллельна одной из сторон допустимого многоугольника.

В своем крайнем положении линия уровня проходит через точку C. Таким образом, *точка C является оптимальным планом задачи*. Это единственная точка, принадлежащая одновременно области допустимых планов и линии уровня в ее крайнем положении. Следовательно, наша задача обладает единственным оптимальным планом.

Выше были рассчитаны координаты точки C (5,39; 1,83).

Таким образом, оптимальный план предписывает выпустить 5,39 единиц продукции A и 1,83 единиц продукции B.

А оптимум целевой функции $F_{max} = 15 \cdot 5{,}39 + 10 \cdot 1{,}83 = 99{,}15$ денежных единиц.

3. Решим задачу методом симплекс-таблиц. Чтобы привести модель задачи к каноническому виду, необходимо систему ограничений-неравенств привести к системе ограничений-равенств. Для этого к левой части каждого неравенства прибавим добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5. Эти добавочные переменные в условиях данной задачи имеют конкретное экономическое содержание, т.е. объем остатков ресурса каждого вида после выполнения плана выпуска продукции.

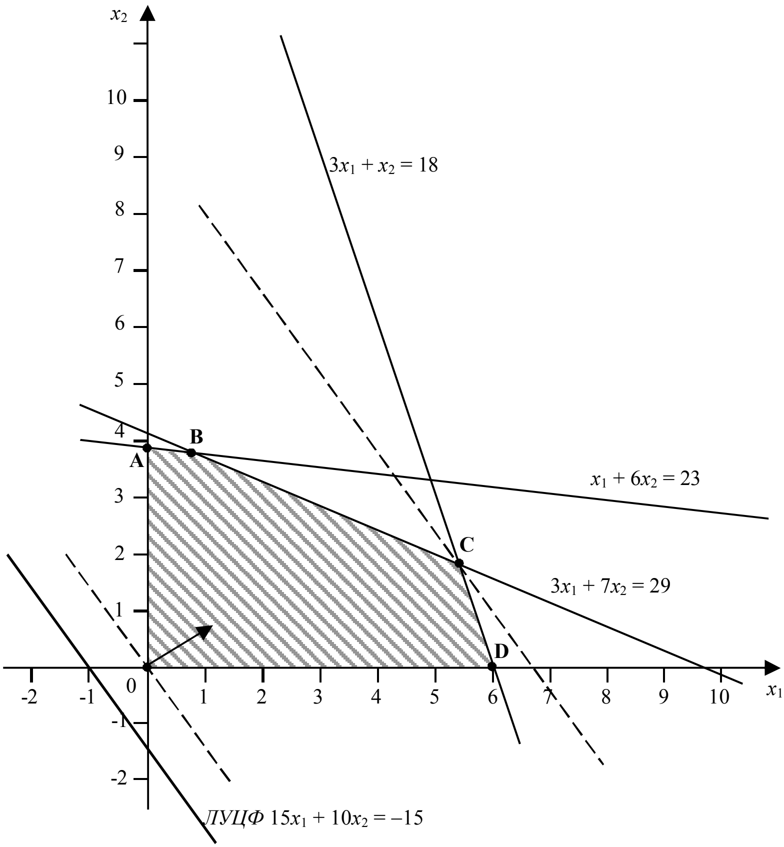


Рис. 7. Решение задачи методом градиента

Задача линейного программирования в канонической форме имеет вид:

$$F = 15x_1 + 10x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 29, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 + 6x_2 + x_5 = 23, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Так как система ограничений состоит из трех независимых уравнений с пятью переменными, то число базисных переменных должно равняться трем, а число свободных – двум.

Для решения задачи симплексным методом прежде всего нужно найти любое базисное решение. В условиях данной задачи оно может быть найдено без труда. Для этого достаточно принять за базисные добавочные переменные x_3, x_4, x_5. Так как коэффициенты при этих переменных образуют единичную матрицу, то отпадает необходимость вычислять определитель (определитель единичной матрицы равен 1, т.е. отличен от нуля).

Положив свободные переменные x_1, x_2, равными нулю, получим первое базисное решение (0; 0; 29; 18; 23), которое оказалось допустимым. Переходим сразу к этапу поиска оптимального решения задачи.

I шаг. Базисные переменные x_3, x_4, x_5. Составляем первую симплекс-таблицу и находим разрешающий элемент.

Базисные переменные	Свободные члены	x1	x2	x3	x4	x5
x3	29	3	7	1	0	0
x4	18	**3**	1	0	1	0
x5	23	1	6	0	0	1
F	0	-15	-10	0	0	0

Базисное решение $F = 0$ (0; 0; 29; 18; 23).

$$x_1 = \min\left\{\frac{29}{3}; \frac{18}{3}; \frac{23}{1}\right\} = \min\{9{,}67; 6; 23\} = 6 .$$

II шаг. Базисные переменные x_3, x_1, x_5. Составляем новую симплекс-таблицу.

Базисные переменные	Свободные члены	x1	x2	x3	x4	x5
x3	11	0	**6**	1	-1	0
x1	6	1	0,33	0	0,33	0
x5	17	0	5,67	0	-0,33	1
F	90	0	-5	0	5	0

Базисное решение $F = 90$ (6; 0; 11; 0; 17).

Так как строка целевой функции содержит отрицательное значение, находим разрешающий элемент:

$$x_2 = \min\left\{\frac{11}{6}; \frac{6}{0{,}33}; \frac{17}{5{,}67}\right\} = \min\{1{,}83; 18; 3\} = 1{,}83 .$$

III шаг. Базисные переменные x_2, x_1, x_5. Переходим к следующей таблице.

Базисные переменные	Свободные члены	x1	x2	x3	x4	x5
x2	1,83	0	1	0,17	-0,17	0
x1	5,39	1	0	-0,06	0,39	0
x5	6,61	0	0	-0,94	0,61	1
F	99,17	0	0	0,83	4,17	0

Эта таблица является последней, потому что в строке целевой функции все элементы положительные. Тогда оптимальным будет решение (5,39; 1,83; 0; 0; 6,61) при котором F_{max} = 99,17.

Т.е. для получения наибольшего дохода, равного 99,17 денежных единиц, предприятие должно выпустить 5,39 единиц продукции вида *A* и 1,83 единицы продукции *B*. При этом ресурсы *Электроэнергия* и *Сырье* будут использованы полностью, а 6,61 единиц ресурса *Оборудования* останутся неизрасходованными.

4. Для решения рассматриваемой задачи с помощью программы MS Excel необходимо выполнить следующие действия.

1. Осуществляем ввод данных в таблицу Excel согласно схеме, представленной на рис. 8.

	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2		Продукт А	Продукт В	Целевая функция	
3					
4	Цена	15	10		
5					
6	Ресурс	Ограничения		Расход	Запасы
7	Электроэнергия	3	7		29
8	Сырье	3	1		18
9	Оборудование	1	6		23

Рис. 8. Заполнение схемы для решения задачи

Для переменных задачи x_1 и x_2 отведены ячейки B3 и C3. Эти ячейки называются рабочими или изменяемыми ячейками. В изменяемые ячейки значения не заносятся, в результате решения задачи в этих ячейках будет отражено оптимальное значение переменной.

В ячейку D4 необходимо ввести формулу для вычисления целевой функции задачи (дохода) $F = 15x_1 + 10x_2$. Формула в алфавите языка Excel имеет вид: =B4*B3+C4*C3.

Израсходованное количество ресурса *Электроэнергия* составляет $3x_1 + 7x_2$. В ячейку D7 (расход электроэнергии) вводится формула =B7*$B$3+C7*$C$3.

Аналогично вводятся формулы расхода остальных ресурсов, а именно *Сырья* и *Оборудования*. В ячейку D8 (расход сырья) вводится формула =B8*$B$3+C8*$C$3. В ячейку D9 (расход оборудования) вводится формула =B9*$B$3+C9*$C$3.

В результате страница примет вид:

	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2		Продукт А	Продукт В	Целевая функция	
3					
4	Цена	15	10	=B4*B3+C4*C3	
5					
6	Ресурс	Ограничения		Расход	Запасы
7	Электроэнегия	3	7	=B7*$B$3+C7*$C$3	29
8	Сырье	3	1	=B8*$B$3+C8*$C$3	18
9	Оборудование	1	6	=B9*$B$3+C9*$C$3	23

Рис. 9. Вид страницы с добавленными формулами

2. На вкладке Данные выбираем команду Поиск решения (если команда отсутствует в окне параметров Excel выберете Надстройки → Перейти и установите Поиск решения) (рис. 10).

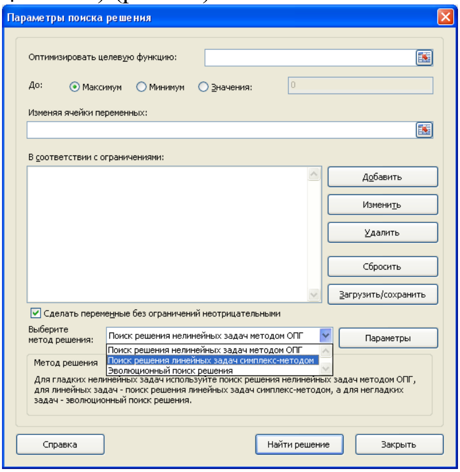


Рис. 10. Окно средства Поиск решения

В появившемся окне нужно оптимизировать целевую функцию в ячейке D4 до Максимум, изменяя ячейки переменных B3:C3. Выберите метод решения: Поиск решения линейных задач симплекс-методом.

3. Чтобы ввести ограничения задачи, нажать кнопку Добавить. В появившемся диалоговом окне слева ввести адрес D7 (израсходованное количество *Электроэнергии*), затем выбрать знак ≤ и в правой части количество этого ресурса, равное 29 (или адрес ячейки E7). После ввода нажать кнопку Добавить и аналогично ввести второе и третье ограничения, а также условие положительности изменяемых ячеек.

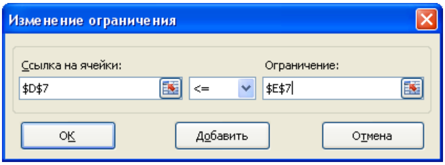


Рис. 11. Добавление ограничения

4. После ввода ограничений получим заполненное окно Поиск решения (рис. 12).

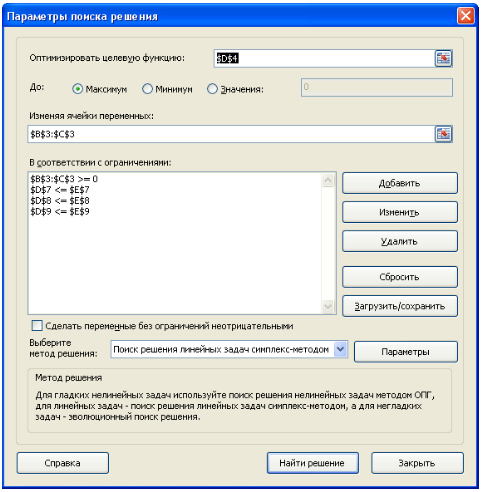


Рис. 12. Результат добавления ограничений

5. Для решения задачи в окне Поиск решения нажать кнопку Найти решение. Если решение найдено, появляется окно (рис. 13).

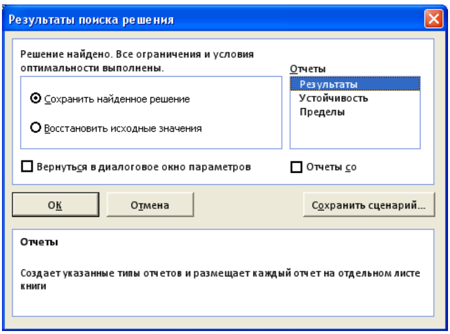


Рис. 13. Результаты Поиска решения

7. Для просмотра результатов выбираем тип отчета Результаты и нажимаем кнопку ОК. В рабочей книге появится лист Отчет по

результатам, который состоит из трех таблиц (рис. 14): в таблице 1 приводятся сведения о целевой функции, в таблице 2 приводятся значения переменных задачи, а в таблице 3 показаны результаты поиска для ограничений задачи.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 08.01.2011 21:39:12

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$4	Цена Целевая функция	0,00	99,17

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$3	Продукт A	0,00	5,39
$C$3	Продукт B	0,00	1,83

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$D$7	Электроэнергия Расход	29	$D$7<=$E$7	связанное	0
$D$8	Сырье Расход	18	$D$8<=$E$8	связанное	0
$D$9	Оборудование Расход	16,39	$D$9<=$E$9	не связан.	6,611111111
$B$3	Продукт A	5,39	$B$3>=0	не связан.	5,39
$C$3	Продукт B	1,83	$C$3>=0	не связан.	1,83

Рис. 14. Отчет по результатам решения задачи

Из этих таблиц видно, что в оптимальном решении:

– максимальный доход ($D$4) равен 99,17;
– объем выпуска продукта *A* ($B$3) равен 5,39;
– объем выпуска продукта *B* ($C$3) равен 1,83;
– расход ресурса *Электроэнергия* ($D$7) равен 29, статус ресурса связанный, разница (остаток ресурса) 0;
– расход ресурса *Сырье* ($D$8) равен 18, статус ресурса связанный, разница (остаток ресурса) 0;
– расход ресурса *Оборудование* ($D$9) равен 16,39, статус ресурса не связанный, разница (остаток ресурса) 6,611.

Первоначальная таблица рабочей книги заполняется результатами, полученными при решении (рис. 15).

	A	B	C	D	E
1		Переменные			
2		Продукт A	Продукт B	Целевая функция	
3		5,39	1,83		
4	Цена	15	10	99,17	
5					
6	Ресурс	Ограничения		Расход	Запасы
7	Электроэнергия	3	7	29	29
8	Сырье	3	1	18	18
9	Оборудование	1	6	16,39	23

Рис. 15. Результат поиска решения

4. ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Сетевой график и его параметры

Выполнение комплексных научных исследований, а также проектирование и строительство промышленных, сельскохозяйственных и транспортных объектов требуют календарной увязки большого числа взаимосвязанных работ, выполняемых различными организациями.

Составление и анализ соответствующих календарных планов представляют собой весьма сложную задачу, при решении которой применяется так называемый *метод сетевого планирования*. Этот метод дает возможность определить, во-первых, какие работы или операции из числа многих, составляющих проект, являются «критическими» по своему влиянию на общую календарную продолжительность проекта и, во-вторых, каким образом построить наилучший календарный план проведения всех работ по данному проекту с тем, чтобы выдержать заданные сроки при минимальных затратах. Идея сетевого метода очень проста. Она основана на графическом изображении комплекса работ с любой степенью их детализации и на выполнении элементарных арифметических операций по расчету параметров и анализу сетевых графиков.

С математической точки зрения *сетевой график* – это связный взвешенный орграф $G = (A, R)$ без петель и контуров. При моделировании производственных процессов в качестве вершин графа используют события, а в качестве дуг – работы.

Событие – это момент начала или завершения одной или нескольких работ. Предполагается, что событие не имеет временной продолжительности, а совершается мгновенно. На трафике оно изображается кружком (прямоугольником) и нумеруется. Событие, которым начинается рассматриваемый комплекс работ, называется *начальным*, а событие, которым завершается комплекс работ, – *конечным*, остальные события являются *промежуточными*.

Под *работой* понимается любой трудовой процесс, сопровождающийся затратой времени и приводящий к нужным результатам. На графе работы, как отмечалось выше, изображаются дугами. Весом каждой дуги является продолжительность соответствующей работы.

Работы бывают действительные и фиктивные.

Действительная работа – это реальный процесс, приводящий к достижению конкретных результатов и требующий затрат определенных ресурсов (материальных средств, времени, персонала). На сетевом графике работа изображается сплошной дугой. *Фиктивная работа* – условное изображение зависимости между действительными работами. Фиктивная работа не требует затрат ресурсов и времени, на графике она изображается пунктирной дугой.

Любая последовательность работ, соединяющая каких-либо два события, называется *путем*. Путь, соединяющий исходное и конечное событие через последовательность работ, называется *полным путем* сетевого графика. Длительностью полного пути является сумма весов (продолжительностей по времени) входящих в него дуг (работ).

Полный путь максимальной продолжительности называется *критическим*. Критическими также называются работы и события, находящиеся на этом пути. Критический путь выделяется на графике жирными или двойными стрелками. Именно он определяет продолжительность выполнения всего комплекса требуемых работ.

По существу, критический путь – самое «узкое» место проекта. Уменьшить общую продолжительность осуществления проекта можно, только изыскав способы сокращения работ, лежащих на критическом пути. Таким образом, нет никакой необходимости в часто практикуемом стремлении «поднажать» на всех работах ради сокращения общей длительности выполнения проекта.

Сумма продолжительностей всех критических работ называется *критическим сроком выполнения комплекса работ*. Очевидно, что быстрее критического срока комплекс работ выполнить нельзя. Действительно, чтобы достигнуть завершающего события, надо пройти обязательно весь критический путь.

Для сокращения продолжительности выполнения комплекса работ необходимо в первую очередь сокращать продолжительность работ, лежащих на критическом пути.

4.2. Правила построения сетевого графика

Можно выделить следующие этапы сетевого планирования: подготовка исходных данных, составление сетевого графика. упорядочение сетевого графика, определение критического пути и резервов времени, анализ и оптимизация сетевого графика.

Этап 1. *Подготовка исходных данных* для построения сетевого графика включает в себя:

– Составление перечня работ и событий. Для этого используются технологические карты, регламенты, инструкции и т.д.

– Выявление групп работ, которые могут выполняться параллельно, практически независимо друг от друга. Эти работы кодируются цифровым кодом, первая цифра которого обозначает номер подгруппы работ, к которой принадлежит рассматриваемая работа, а вторая цифра – порядковый номер данной работы в этой подгруппе.

Определение логических связей и последовательности выполнения работ.

– Определение продолжительности работ. Обычно эти данные получаются заблаговременно путем хронометража, методом экспертного опроса или путем анализа статистических данных.

– Установление последовательности выполнения и взаимозависимости отдельных работ. Суть этой процедуры состоит в том, что для каждой из работ рассматриваемого перечня определяются работы, непосредственно ей предшествующие, т.е. работы, до завершения которых не может быть начата рассматриваемая работа.

На основании этих исходных данных составляется таблица, содержащая номера работ по порядку, содержание (наименование) работ, число (состав) исполнителей, продолжительность работ и перечни предшествующих работ для каждой работы комплекса.

Этап 2. *Составление сетевого технологического графика* осуществляется в следующем порядке. Сначала строятся *частные сетевые графики выполнения* отдельных подгрупп работ. При построении графиков следует соблюдать ряд правил (рис. 19).

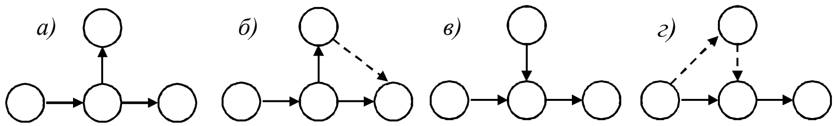


Рис. 16. Правила построения сетевого графика

1. В сетевом графике должны быть одно начальное и одно завершающее события. Если это не так, то вводятся фиктивные события и работы.
2. Дуги, соединяющие события, могут иметь произвольную длину и произвольный наклон, но желательно избегать их пересечения.
3. График не должен иметь тупиковых событий, т.е. событий (за исключением завершающего события), из которых не выходит ни одной дуги (рис. 19, *а*). В этом случае вводят фиктивную работу (рис. 19, *б*), показанную пунктирной дугой.
4. График не должен содержать событий (за исключением начального события), в которые не входит ни одна дуга (рис. 19, *в*). В этом случае вводят фиктивную работу (рис. 19, *г*), показанную пунктирной дугой.
5. Любые два события – вершины графа – могут быть непосредственно связаны не более чем одной дугой.
6. График не должен содержать замкнутых контуров и петель.

Построение частных сетевых графиков производится слева направо от исходного события к завершающему. При этом на графиках отмечаются лишь коды работ и их продолжительность. Затем проводят сшивание частных сетевых графиков в один путем совмещения крайних событий частных графиков и введения, если это нужно, фиктивных работ.

Этап 3. *Расчет параметров сетевого графика*. Основными параметрами сетевого технологического графика являются ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени наступления событий.

Ранний срок свершения события $t_p(j)$ – максимальная продолжительность времени выполнения всех работ от исходного события до рассматриваемого j-го события.

Ранние сроки свершения событий определяются последовательно от начального события 0 к конечному N, в порядке нумерации событий, по формуле

$$t_p(j) = \max\{t_p(i) + t(i, j)\},\ t_p(0) = 0,\ i < j,\ t_p(N) = T_{кр},$$

где $t_p(j)$ – ранний срок свершения i-го события, предшествующего рассматриваемому j-му событию; $t(i,\ j)$ – продолжительность работы, соединяющей i-е и j-е события.

Значения t_p могут быть определены непосредственно из графика с помощью мнемонического правила: устанавливаются события (по входящим стрелкам), которые непосредственно предшествуют рассматриваемому событию и к значениям t_p этих событий прибавляются длины дуг, соединяющих эти события с рассматриваемым, и из полученных сумм выбирается максимальная, которая и определяет собой значение t_p рассматриваемого события.

Поздний срок свершения события $t_n(i)$ – максимальный допустимый срок наступления рассматриваемого i-го события, не приводящий к увеличению критического пути. Он показывает, через какое время после начала выполнения комплекса работ должно наступить интересующее событие, чтобы общая продолжительность работ не увеличилась.

Поздние сроки свершения событий определяются последовательно от завершающего события к исходному в порядке, обратном нумерации событий, по формуле

$$t_n(j) = \min\{t_n(i) - t(i, j)\},\ t_n(N) = t_p(N) = T_{кр},$$

где $t_n(j)$ – поздний срок свершения j-го события, которому непосредственно предшествует рассматриваемое i-е событие; $t(i,\ j)$ – продолжительность работы (длина дуги), соединяющей i-е и j-е события.

Заметим, что значения t_n и t_p конечного события равны и соответствуют величине критического пути $T_{кр}$. Это обстоятельство можно использовать для проверки правильности выполнения расчетов.

Значения t_n также могут быть определены из графика с помощью мнемонического правила: устанавливаются события (по выходящим дугам), которым непосредственно предшествует рассматриваемое событие и из значений этих событий вычитаются длины дуг, соединяющих эти события с рассматриваемым, и из полученных значений выбирается минимальная, которая и определяет собой значение t_n рассматриваемого события.

Резерв времени свершения события $\Delta t(i)$ показывает, насколько можно сдвинуть срок наступления рассматриваемого события в сторону его увеличения, не увеличивая при этом критического пути:

$$\Delta t(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

После расчета параметров сетевого графика определяется *критический путь*. Для этого устанавливаются события с резервом времени свершения, равным нулю ($\Delta t = 0$). Критический путь будет пролегать между этими событиями, соединяя исходное и завершающее события непрерывной последовательностью работ. Критический путь строится от завершающего события к исходному (если параметры графика определены правильно, резервы времени свершения исходного и завершающего событий равны нулю). При этом если в событие, лежащее на критическом пути, входят дуги из нескольких событий, также лежащих на критическом пути (у них также $\Delta t = 0$), то критический путь проходит по дуге, определяющей t_p рассматриваемого события.

В общем случае критических путей может быть несколько.

Этап 4. Под *оптимизацией технологического графика* понимается его улучшение с целью уменьшения времени выполнения комплекса работ при заданном количестве сил и средств. Сетевой метод планирования работ не дает строго оптимального решения. Однако путем последовательного многократного улучшения первоначального варианта можно получить график, близкий к оптимальному.

Эта задача может быть решена путем привлечения к выполнению работ, лежащих на критическом пути, дополнительных сил и средств за счет работ, не лежащих на этом пути.

Другой способ оптимизации сетевого технологического графика заключается в изменении порядка следования работ (изменении состава предшествующих работ).

В процессе оптимизации состав работ, лежащих на критическом пути, может изменяться. В этом случае дальнейшая оптимизация технологического графика выполняется по вновь образованному критическому пути.

Критериями оптимальности сетевого графика могут служить:

– коэффициенты загруженности α_i или простоя β_i i-го специалиста

$$\alpha_i = \frac{T_i}{T_{кр}}; \qquad \beta_i = 1 - \alpha_i;$$

– коэффициенты средней загруженности α или простоя β специалистов

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{nT_{кр}}; \quad \beta = 1 - \alpha,$$

где T_i – суммарная продолжительность работы *i*-го специалиста; $T_{кр}$ – длина критического пути; n – число специалистов, задействованных в работах.

Признаками высокого качества технологического графика (его близости к оптимальному) являются:

– близость значений α_i $i = \overline{1,n}$, к значению α, которые должны различаться не более чем на 0,01;

– близость α к единице.

4.3. Практический пример построения сетевого графика и расчета его параметров

Перечень работ, выполняемых при техническом обслуживании автомобиля, представлен в табл. 2.

Таблица 2

Перечень работ

Номер работы	Код работы	Число исполнителей, человек	Продолжительность работы, мин	Предшествующие работы	Участие специалистов в работах
1	1.1	1	5	–	№1
2	1.2	2	8	2.3	№1, №2
3	2.1	1	5	1.1	№1
4	2.2	1	10	1.1	№2
5	2.3	2	6	2.1, 2.2	№1, №2

1. Построить сетевой график.
2. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).
3. Рассчитать коэффициенты загрузки специалистов.

Решение:

1. По данным табл. 2 построить частные сетевые и общий сетевой графики выполнения работ. Разобьем выполняемые работы на два частных сетевых графика (рис. 17).

Сшивание частных графиков производится в следующем порядке: к первому частному графику «пришивается» второй, к вновь образованному графику «пришивается» третий и т.д. до тех пор, пока не будут «сшиты» все частные графики.

Рис. 17. Частные сетевые графики

При сшивании частных сетевых графиков могут образовываться замкнутые контуры. Так, например, «сшивая» частные сетевые графики на рис. 17, получаем замкнутый контур на рис. 18, *а*. Чтобы его разомкнуть, введем дополнительное событие между работами 1.1 и 1.2 (рис. 18, *б*). События, которые связаны только фиктивными работами, объединяются. После «сшивания» частных графиков в один производится нумерация событий общего графика (номер события указывается в кружке).

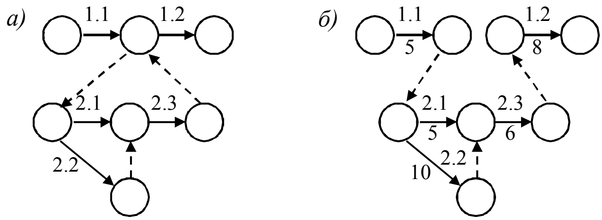


Рис. 18. «Сшивание» частных графиков

Нумерация событий производится по следующему правилу: начальному событию присваивается нулевой номер, следующем событию присваивается очередной номер, если все входящие в него дуги выходят из уже пронумерованных событий, и т.д. Если под это правило подпадает несколько событий, то нумерация производится в любой удобной последовательности, например очередной номер присваивается событию, встречающему первым при следовании слева направо.

После нумерации сетевой график, изображенный на рис. 18, *б* имеет вид, представленный на рис. 19.

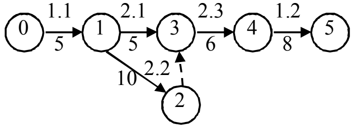


Рис. 19. Сетевой технологический график

После построения сетевого графика производятся расчет его параметров, их анализ и оптимизация.

2. Рассчитаем параметры сетевого графика, изображенного на рис. 19.

Проведем расчеты по формулам, рассмотренным выше, результаты расчетов сведем в табл. 3.

Таблица 3

Таблица расчетов параметров сетевого графика

Номер события i	Ранний срок события $t_p(j) = \max\{t_p(i) + t(i,j)\},\ i < j$	Поздний срок события $t_n(j) = \min\{t_n(i) - t(i,j)\},\ j < i$	Резерв времени события $\Delta t(i) = t_n(i) - t_p(i)$
0	0	min{5 - 5} = 0	0
1	max{0 + 5) = 5	min{15-10; 15-5} = 5	0
2	max {5 + 10} = 15	min{15 - 0} = 15	0
3	max{5 + 5; 15 + 0} = 15	min{21 - 6} =15	0
4	max{15 +6} = 21	min{29-8} =21	0
5	max{21 +8} = 29	29	0

Как очевидно из таблицы, продолжительность критического пути составляет $T_{кр}$ = 29 ед. времени, а сам критический путь проходит через все события графика.

На рис. 20 критический путь обозначен более жирными дугами.

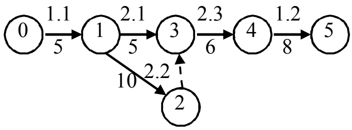


Рис. 20. Сетевой график с критическим путем

Работы, лежащие на критическом пути, являются наиболее напряженными, поскольку увеличение сроков выполнения этих работ обязательно приводит к увеличению общей продолжительности выполнения всего комплекса работ. И напротив, сокращение сроков выполнения работ, лежащих на критическом пути, является одним из наиболее эффективных путей оптимизации сетевого технологического графика.

3. Рассчитаем коэффициенты загрузки специалистов по данным табл. 2. Из условия задачи следует, что специалист №1 участвует в выполнении работ 1.1, 1.2, 2.1, 2.3, а специалист №2 – работ 1.1, 2.2, 2.3.

Проведем расчеты по приведенным выше формулам.

Для 1-го специалиста $\alpha_1 = \dfrac{5+8+5+6}{29} \approx 0{,}83$.

Для 2-го специалиста $\alpha_2 = \dfrac{8+10+6}{29} \approx 0{,}83$.

Как очевидно, загруженность специалистом одинакова и достаточна высокая, что свидетельствует о высоком качестве организации труда.

5. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Особенности матричных моделей

Матричная модель – один из видов экономико-математических моделей, представляющий собой прямоугольную таблицу, элементы которой отражают взаимосвязь экономических объектов и обладают определенным экономическим смыслом. Значения элементов вычисляются по установленным в теории матриц правилам. Матричные модели используются в тех случаях, когда нужно отобразить балансовые соотношения затрат на производство и результатов, нормативы затрат и выпусков, производственно-организационные и экономические структуры, а также информационные взаимосвязи в процессах управления.

Разновидностью матричных моделей являются *балансы.*

Особый класс представляют собой *информационные матрицы,* в которых отображаются движение и переработка информации в процессе управления. Особенность этих моделей заключается в том, что они, как правило, бывают комбинаторными: показатели, стоящие на пересечении строк и столбцов, показывают лишь наличие или отсутствие связей между элементами информационной системы.

Матричные модели являются важным инструментом плановых расчетов. С их помощью осуществляются расчеты потребностей в затратах предметов труда, рабочей силы, машинного времени, основных фондов, расчет заработной платы, затрат труда, дополнительных капиталовложений и т.д.

Плановые расчеты по матричным моделям позволяют определить все основные показатели развития фирм, предприятий, отраслей, регионов и страны в целом.

Матричные модели удобны для проведения экономического анализа, поскольку являются простой и наглядной формой отображения свойств объектов самой различной природы. С помощью матричной модели производственного процесса на предприятии выявляются нерациональные связи, исследуется загрузка оборудования и использование рабочей силы. Матричные модели, построенные в сопоставимых стоимостных показателях, служат для анализа взаимодействия различных видов деятельности на данном объекте, которые в целом формируют итог хозяйственной деятельности предприятия, фирмы, объединения.

Матричные модели могут быть использованы как средство интеграции информации. Матричная организация экономической информации обеспечивает приведение отчетных и плановых заданий в сопоставимую форму, наиболее удобную для непосредственного их использования и анализа на всех уровнях планирования и управления. Существенным преимуществом матричной организации системы экономической информации является возможность ее практически полной машинной обработки, возможность проверки, внесения изменений и дополнений, ускорение и облегчение процесса подготовки информации для оптимального планирования.

Матричная модель систематизирует комплекс нормативных данных, давая предприятию полностью взаимоувязанную систему нормативов – материальных, стоимостных, трудовых, финансовых и др.

Матричные модели применяются и в теоретических исследованиях экономики, представляющих процесс преобразования затрат в результаты. Элементами матрицы при этом являются величины затрат при разных «технологических способах».

5.2. Сущность балансового метода

Балансовый метод – это принятый в практике планирования метод взаимного сопоставления ресурсов – материальных, трудовых, финансовых – и потребностей в них. Использование этого метода обеспечивает взаимное согласование всех разделов и показателей плана.

На уровне экономики страны балансовый метод используется прежде всего для определения основных пропорций воспроизводства, отраслевой и территориальной структуры производства, что важно для выработки инвестиционной политики. Можно задать пропорции между совокупным общественным продуктом и национальным доходом, между производством средств производства и предметов потребления, между долей накопления и потребления в национальном доходе, между промышленностью и сельским хозяйством, между живым трудом и средствами труда и др.

Помимо общехозяйственных пропорций могут устанавливаться межотраслевые, внутриотраслевые. Ясно, что подобные пропорции важны для устойчивой экономики, имеющей развитое промышленное и сельское хозяйство. Балансовый метод применяется в экономических системах любого уровня: от предприятий и фирм до экономики страны.

В матричных моделях балансовый метод получает строгое математическое выражение, причем методы расчетов, а также ряд используемых экономических характеристик (например, коэффициенты прямых затрат) аналогичны в различных балансах. Это позволяет рассмотреть содержание, структуру и основные зависимости, например межотраслевого баланса производства и распределения продукции в хозяйстве страны.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение продукции в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Основу баланса составляет совокупность всех отраслей материального производства. Пусть их будет n. Каждая отрасль в балансе фигурирует дважды, как производящая и как потребляющая. Математическая модель межотраслевого баланса представлена в табл. 4. Рассмотрим подробнее эту таблицу. Последовательность отраслей в модели и по вертикали, и по горизонтали остается одной и той же.

Таблица 4

Производящие отрасли	Потребляющая отрасль				Конечная продукция	Валовая продукция
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2n}	y_2	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{3j} **I**	x_{3n}	y_3 **II**	X_3
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{nj}	x_{nn}	y_n	X_n
Оплата труда	v_1	v_2	v_j **III**	v_n	$v_{кон}$	
Чистый доход	m_1	m_2	m_j	m_n	$m_{кон}$ **IV**	
Валовая продукция	X_1	X_2	…	X_n		

В табл. 4 введены следующие обозначения:

x_{ij} – стоимость средств производства, произведенных i-й отрасли и потребленных в качестве материальных затрат в j-ой отрасли; y_i – затраты вне сферы материального производства, т.е. для целей конечного потребления; v_i – оплата труда работников j-й отрасли; m_j – чистый доход j-й отрасли; X_i - валовая продукция i-й отрасли.

В строках модели содержатся данные о распределении произведенного за определенный период объема продукции каждой отрасли материального производства. Для любой производящей i-й отрасли справедливо соотношение:

$$X_i = y_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} .$$

Это n уравнений, отражающих распределение продукции.

В столбцах отражается структура материальных затрат и чистой продукции (сумма оплаты труда и чистого дохода) каждой отрасли как потребляющей. Поскольку сумма материальных затрат и чистой продукции составляет валовую продукцию, то имеет место

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + v_j + m_j$$

Эта система n уравнений, структура которых соответствует известной формуле:

$$P = C + V + m,$$

где C – перенесенная на продукт стоимость; $V + m$ – вновь созданная стоимость.

Рассмотрим балансовую модель в разрезе крупных частей. Выделяются 4 части, имеющие различное экономическое содержание, они называются *квадрантами.* В квадранте **I** содержатся межотраслевые потоки средств производства. Это квадратная матрица, сумма элементов которой по строкам и по столбцам равняется годовому фонду возмещения затрат средств производства. Во **II** квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства. В развернутой схеме конечная продукция показывается по направлениям использования: на личное потребление населения, общественное потребление, на накопление, возмещение потерь, экспорт и т.д. Характеризуется отраслевая материальная структура национального дохода. **III** квадрант также характеризует национальный доход, но со стороны его стоимостного состава как сумму оплаты труда и чистого дохода всех отраслей материального производства. В развернутой схеме баланса этот квадрант содержит различные виды доходов работников материального производства и различные виды чистого дохода (прибыль государственных промышленных предприятий, аграрного сектора, налог с оборота и др.). Данные **III** квадранта необходимы для анализа соотношений между вновь созданной и перенесенной стоимостями, между величиной необходимого и прибавочного продуктов в целом по материальному производству и в отраслевом разрезе. Общие итоги **II** и **III** квадрантов равны между собой. Просуммируем по всем отраслям уравнение:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j + \sum_{j=1}^{n} m_j$$

Затем просуммируем уравнение:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i \, .$$

Левая часть – весь валовой общественный продукт. Приравняв правые части и сократив обе части уравнения на сумму межотраслевых потоков продукции, имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j + \sum_{j=1}^{n} m_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \, .$$

В межотраслевом балансе соблюдается важнейший принцип единства материально-вещественного и стоимостного составов национального дохода.

IV квадрант отражает конечное распределение национального дохода. Общий итог **IV** квадранта должен быть равен созданному за год национальному доходу (как **II** и **III**). Данные этого квадранта важны для отражения баланса доходов и расходом населения, источников финансирования капитальных вложении, текущих затрат непроизводственного сектора.

Таким образом, межотраслевой баланс в рамках единой экономико-математической модели объединяет балансы отрасти материального производства, баланс всего общественного продукта, балансы национального дохода, финансовый, доходом и расходов населения.

Наряду с межотраслевыми балансами в стоимостном выражении разрабатываются межпродукитовые балансы в натуральном выражении. В этом случае не проводится суммирование в столбцах, затраты труда берутся в человеко-часах. Основное правило балансового метода заключается в обязательном равенстве итогов строк и столбцов. С экономической точки зрения это равенство интерпретируется как баланс стоимости: стоимость распределенных и накопленных благ и услуг равна стоимости производственных затрат плюс вновь созданная стоимость.

5.3. Математический аппарат метода межотраслевого баланса

Все основные величины межотраслевых моделей находятся между собой в определенной математической зависимости. Она характеризуется уравнения

$$X_i = y_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + v_j + m_j ,$$

отражающими реально существующие зависимости отраслей в общественном производстве. Однако воспользоваться этими соотношениями для плановых расчетов нельзя, так как в них входят величины, которые изначально неизвестны. Возникла необходимость ввести в соотношения такие данные, которые известны заранее, перед осуществлением плановых расчетов. Технологические связи между отраслями измеряются с помощью коэффициентов прямых материальных затрат. Они могут быть рассчитаны путем деления величин межотраслевых потоков на валовую продукцию потребляющих отраслей. Например, если первая отрасль – производство электроэнергии, вторая – угольная промышленность, то $a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2}$ – коэффициент прямых затрат электроэнергии на единицу продукции угольной промышленности, $a_{21} = \frac{x_{21}}{X_2}$ – коэффициент прямых затрат угля на выпуск единицы электроэнергии. Для любой пары отраслей

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}.$$

Коэффициент прямых затрат показывает, сколько единиц продукции i-й отрасли непосредственно затрачивается в качестве средств производства на выпуск единицы продукции j-й отрасли. При $i = j$ имеем коэффициент затрат собственной продукции отрасли на единицу ее валового выпуска. Коэффициенты прямых затрат образуют квадратную матрицу n-го порядка $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$.

Из формулы следует, что $x_{ii} = a_{ii} \cdot X_i$, значит выражение коэффициентов прямых затрат можно представить в виде:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i.$$

Формула служит основным математическим соотношением как стоимостных, так и натуральных балансов, и является исходным пунктом расчетов при разработке балансов на плановый период.

Предполагается, что известны a_{ij}, тогда в системе n уравнений $2n$ неизвестных. Неизвестны валовые выпуски всех отраслей и уровни их конечной продукции. Система неопределенна и имеет бесчисленное множество решений. Необходимо задать произвольные значения любым n неизвестным и тогда однозначно решить систему. Исходя из экономического смысла показателей можно говорить о трех вариантах расчета:

1. В модели заданы валовые выпуски продукции всех отраслей и X_j и определяется конечная продукция y_i.
2. Заданы плановые уровни конечной продукции всех отраслей y_i, а определяются величины валовой продукции, обусловленные как заданием по конечному выпуску, так и технологической структурой производства (коэффициенты затрат).
3. По отдельным отраслям задаются уровни валовой продукции по другим – конечного выпуска (возможно по отдельным отраслям и то и другое), так что в сумме число заданных величин составляет n. Решая систему, находим значения остальных n неизвестных.

Теоретически наиболее приемлем второй вариант, а практически третий. Задавать валовой выпуск целесообразно по отраслям, составляющим фундамент общественного производства: энергетической, топливной, металлургической промышленности, машиностроению.

5.3. Практический пример составления межотраслевого баланса

Экономическая структура состоит из трех отраслей: промышленности, сельского хозяйства и прочих отраслей. Пусть на плановый период заданы матрица коэффициентов прямых затрат ***A*** и вектор конечной продукции ***Y***.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}20 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{vmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать плановые объемы выпуска валовой продукции, величину межотраслевых потоков, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

Решение:

Для решения составим систему уравнений.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}25x_3 + 56 \\ x_2 = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}03x_3 + 20 \\ x_3 = 0{,}10x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}08x_3 + 12 \end{cases}$$

Приведем подобные члены, перенесем все неизвестные в левую часть:

$$\begin{cases} 0{,}7x_1 - 0{,}25x_2 - 0{,}25x_3 = 56 \\ -0{,}15x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}03x_3 = 20 \\ -0{,}10x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}92x_3 = 12 \end{cases}.$$

Решим систему уравнений средствами Excel. Создадим модель задачи представленную на рис. 21, запустим средство программы Поиск решения (вкладка Данные команда Поиск решения) и получим результат решения системы ***X*** = (102,20; 41,05; 26,38).

Для составления баланса рассчитаем межотраслевые потоки:

$x_{11} = 0{,}3 \cdot 102{,}2 = 30{,}6$;

$x_{12} = 0{,}25 \cdot 41{,}05 = 10{,}3$;

$x_{13} = 0{,}2 \cdot 26{,}38$ и т.д.

Реализация данного этапа представлена на рис. 22.

Модель решения системы

	A	B	C
1	x1		
2	x2		
3	x3		
4	1-е уравнение	=0,7*$B$1-0,25*$B$2-0,2*$B$3	56
5	2-е уравнение	=-0,15*$B$1+0,88*$B$2-0,03*$B$3	20
6	3-е уравнение	=-0,1*$B$1-0,05*$B$2+0,92*$B$3	12

Результат решения системы

	A	B	C
1	x1	102,1974497	
2	x2	41,04670265	
3	x3	26,38269577	
4	1-е уравн	56	56
5	2-е уравн	20	20
6	3-е уравн	12	12

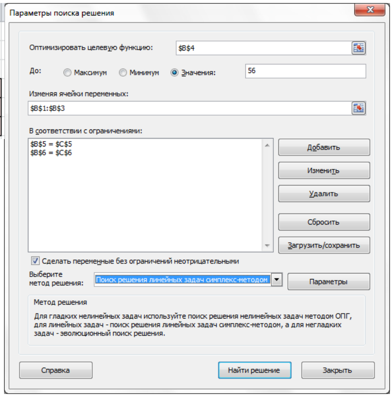


Рис. 21. Решение системы уравнений

Модель расчета межотраслевых

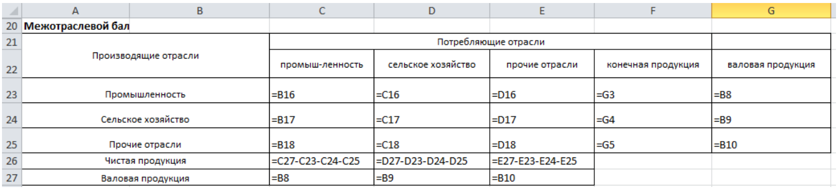
	A	B	C	D
1		Исходные данные		
2				
3	Матрица	0,3	0,25	0,2
4	A	0,15	0,12	0,03
5		0,1	0,05	0,08
6				
7	Валовая продукция			
8	x1	102,197449737933		
9	x2	41,0467026519596		
10	x3	26,3826957678166		
11	1-е уравнение	=(1-B3)*$B$8-C3*$B$9-D3*$	=K8	
12	2-е уравнение	=-B4*$B$8+(1-C4)*$B$9-D4*	=K9	
13	3-е уравнение	=-B5*$B$8-C5*$B$9+(1-D5)*	=K10	
14				
15	Матрица межотрасл			
16		=B3*$B$8	=C3*$B$9	=D3*$B$10
17	xii	=B4*$B$8	=C4*$B$9	=D4*$B$10
		=B5*$B$8	=C5*$B$9	=D5*$B$10

Результат расчета

	A	B	C	D	E	F	G
1		Исходные данные					
2							
3	Матрица	0,3	0,25	0,2		Вектор	56
4	A	0,15	0,12	0,03		Y	20
5		0,1	0,05	0,08			12
6							
7	Валовая продукция						
8	x1	102,1974497					
9	x2	41,04670265					
10	x3	26,38269577					
11	1-е уравне	56	0				
12	2-е уравне	20	0				
13	3-е уравне	12	0				
14							
15	Матрица межотраслевых потоков						
16		30,66	10,26	5,28			
17	xij	15,33	4,93	0,79			
18		10,22	2,05	2,11			

Рис. 22. Расчет матрицы межотраслевых потоков

Результаты представим в форме межотраслевого баланса, где чистая продукция определяется как разница между валовой продукцией отрасли и суммой межотраслевых потоков в столбцах (рис. 23 и табл. 5).



	A	B	C	D	E	F	G
20	Межотраслевой бал						
21	Производящие отрасли		Потребляющие отрасли				
22			промыш-ленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	конечная продукция	валовая продукция
23	Промышленность		=B16	=C16	=D16	=G3	=B8
24	Сельское хозяйство		=B17	=C17	=D17	=G4	=B9
25	Прочие отрасли		=B18	=C18	=D18	=G5	=B10
26	Чистая продукция		=C27-C23-C24-C25	=D27-D23-D24-D25	=E27-E23-E24-E25		
27	Валовая продукция		=B8	=B9	=B10		

Рис. 23. Макет модели межотраслевого баланса

Таблица 5

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			конечная продукция	валовая продукция
	промыш-ленность	сельское хозяйство	прочие отрасли		
Промышленность	30,66	10,26	5,28	56	102,20
Сельское хозяйство	15,33	4,93	0,79	20	41,05
Прочие отрасли	10,22	2,05	2,11	12	26,38
Чистая продукция	45,99	23,81	18,20		
валовая продукция	102,20	41,05	26,38		

6. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

6.1. Принципиальные системы регулирования товарных запасов

В практической деятельности организаций и служб маркетинга используются простые принципиальные системы регулирования товарных запасов, основанные на различных стратегиях пополнения запасов, т.е. на определенных правилах этого пополнения, выраженных в достаточно обшей форме. В качестве параметров в этих системах принимаются величина имеющихся на складе запасов, допустимые колебания уровня запасов, размеры заказа на пополнение запасов, его периодичность и др. Системы различаются между собой в зависимости от того, какие из параметров выбраны и качестве регулирующих. Рассмотрим краткий обзор этих систем.

Система с фиксированным размером заказа. Это наиболее распространенная система, в которой размер заказа на пополнение запасов – постоянная величина, а поставка очередной партии товара осуществляется при уменьшении наличных запасов до определенного критического уровня, называемого *точкой заказа.* Поэтому регулирующими параметрами системы с фиксированным размером заказа являются: 1) точка заказа, т.е. фиксированный уровень запаса, при снижении до которого организуется заготовка очередной партии товара, и 2) размер заказа, т.е. величина партии поставки. Данную систему часто называют «двухбункерной», так как запас хранится как бы в двух бункерах: в первом бункере для удовлетворения спроса в течение периода между фактическим пополнением запаса и датой следующего ближайшего заказа, а во втором – для удовлетворения спроса в течение периода от момента подачи заказа до поступления очередной партии товара, т.е. во втором бункере хранится запас на уровне точки заказа.

Система с фиксированной периодичностью заказа. При этой системе заказы на очередную поставку товарного запаса повторяются через равные промежутки времени. В конце каждого периода проверяется уровень запасов и исходя из этого определяется размер заказываемой партии; при этом запас пополняется каждый раз до определенного уровня, не превышающего максимальный запас. Таким образом, регулирующие параметры этой системы: 1) максимальный уровень запасов, до которого осуществляется их пополнение, и 2) продолжительность периода повторения заказов. Система с фиксированной периодичностью заказа эффективна, когда имеется возможность пополнять запас в различных размерах, причем затраты на оформление заказа любого размера невелики. Одним из достоинств этой системы можно считать возможность периодической проверки остатков на складе и отсутствие необходимости вести систематический учет движения остатков. К недостаткам системы относится то, что она не исключает возможность нехватки товарных запасов.

Система с двумя фиксированными уровнями запасов и с фиксированной периодичностью заказа. В этой системе допустимый уровень запасов регламентируется как сверху, так и снизу. Кроме максимального верхнего уровня запаса устанавливается нижний уровень (точка заказа). Если размер запаса снижается до нижнего уровня еще до наступления фиксированного времени пополнения запаса, то делается внеочередной заказ. В остальных случаях система функционирует как система с фиксированной периодичностью заказа. В данной системе имеется три регулирующих параметра: 1) максимальный уровень запаса; 2) нижний уровень запаса (точка заказа) и 3) длительность периода между заказами. Первые два параметра постоянны, третий – частично переменный. Рассматриваемая система сложнее предыдущей, однако она позволяет исключить возможность нехватки товарного запаса. Недостатком системы является то, что пополнение запасов до максимального уровня не может производиться независимо от фактического расходования запасов.

Система с двумя фиксированными уровнями запасов без постоянной периодичности заказа, или (s, S) – *стратегия управления запасами.* Эту систему называют также (S–s)-системой, или системой «максимум-минимум». Рассмотрим (s, S)-стратегию управления запасами более подробно. Она устраняет недостаток предыдущей системы и является ее модификацией. В этой системе два регулирующих параметра: 1) нижний (критический) уровень запаса s, и 2) верхний уровень запаса S.

Если через x обозначить величину запасов до принятия решения о их пополнении, через p – величину пополнения, а через $y = x + p$ – величину запасов после пополнения, (s, S)-стратегия управления запасами задается функцией

$$y(x) = \begin{cases} x & \text{при } x > s \\ \mathrm{S} & \text{при } x \le s \end{cases},$$

т.е. пополнение не происходит, если имеющийся уровень запасов больше критического уровня s; если имеющийся уровень меньше или равен s, то принимается решение о пополнении запаса обязательно до верхнего уровня S, так что величина пополнения равна $p = S - x$.

Саморегулирующиеся системы. Рассмотренные выше системы регулирования запасов предполагают относительную неизменность условий их функционирования. На практике такое постоянство условий встречается редко, что вызвано изменениями потребности в товарных запасах, условиями их поставки и т.д. В связи с этим возникает необходимость создания комбинированных систем с возможностью саморегулирования (адаптации к изменившимся условиям). Создаются системы с изменяющимися периодичностью и размером заказов, учитывающие стохастические (недетерминированные) условия. В каждой такой системе устанавливается определенная целевая функция, служащая критерием оптимальности функционирования системы в рамках соответствующей экономико-математической модели управления запасами.

В качестве целевой функции в моделях управления запасами чаще всего используется минимум затрат, связанных с заготовкой и хранением запасов, а также потери от дефицита.

Одним из элементов целевой функции при построении саморегулирующихся систем управления запасами являются затраты, связанные с организацией заказа и его реализацией, начиная с поиска поставщика и кончая оплатой всех услуг по доставке товарных запасов на склад. Часть расходов, связанных с организацией заказов, не зависит от размера заказа, но зависит от количества этих организаций в год. Расходы, связанные с реализацией заказа, зависят от размера заказанной партии, причем расходы в расчете на единицу товара уменьшаются при увеличении размера партии.

Другой элемент целевой функции – затраты, связанные с хранением запаса. Часть издержек хранения носит суточный характер (плата за аренду помещений, за отопление и др.), другая часть прямо зависит от уровня запасов (расходы на складскую переработку товарных запасов, потери от порчи, издержки учета и др.). При расчетах на основе экономико-математических моделей управления запасами обычно пользуются удельной величиной издержек хранения, равной издержкам на единицу хранимого товара в единицу времени. При этом предполагают, что издержки хранения за календарный период пропорциональны размеру запасов и длительности периода между заказами и обратно пропорциональны количеству заказов за этот период.

Наконец, третьим элементом рассматриваемой целевой функции являются потери из-за дефицита, когда снабженческо-сбытовая организация несет материальную ответственность за неудовлетворение потребности потребителей из-за отсутствия запасов.

Например, при неудовлетворенном спросе снабженческо-сбытовая организация может нести убытки в виде штрафа за срыв поставки. Вероятность дефицита – это ожидаемая относительная частота появления случаев нехватки товарной продукции в течение более или менее продолжительного интервала времени. Часто вероятность дефицита определяется как частное от деления числа дней, когда товар на складе отсутствует, на общее число рабочих дней, например, в году.

6.2. Модель экономически выгодных размеров заказываемых партий

Рассмотрим работу склада, на котором хранятся товарные запасы, расходуемые на снабжение потребителей. Работа реального склада сопровождается множеством отклонений от идеального режима: заказана партия одного объема, а прибыла партия другого объема; по плану партия должна прибыть через две недели, а она пришла через 10 дней; при норме разгрузки одни сутки разгрузка партии длилась трое суток и т.д. Учесть все эти отклонения практически невозможно, поэтому при моделировании работы склада обычно делаются следующие предположения:

– скорость расходования запасов со склада – постоянная величина, которую обозначим M (единиц товарных запасов в единицу времени); в соответствии с этим график изменения величины запасов в части расходования является отрезком прямой;

– объем партии пополнения Q есть постоянная величина, так что система управления запасами – это система с фиксированным размером заказа;

– время разгрузки прибывшей партии пополнения запасов мало, будем считать его равным нулю;

– время от принятия решения о пополнении до прихода заказанной партии есть постоянная величина Δt, так что можно считать, что заказанная партия приходит как бы мгновенно: если нужно, чтобы она пришла точно в определенный момент, то ее следует заказать в момент времени на Δt ранее;

– на складе не происходит систематического накопления или перерасхода запасов. Если через T обозначить время между двумя последовательными поставками, то обязательно выполнение равенства: $Q = MT$. Из сказанного выше следует, что работа склада происходит одинаковыми циклами длительностью T и за время цикла величина запаса изменяется от максимального уровня S до минимального уровня s;

– наконец, будем считать обязательным выполнение требования, чтобы отсутствие запасов на складе было недопустимым, т.е. выполняется неравенство $s \geq 0$. С точки зрения уменьшения издержек склада на хранение отсюда вытекает, что $s = 0$ и, следовательно, $S = Q$.

Окончательно график «идеальной» работы склада в форме зависимости величины запасов y от времени t будет иметь вид, представленный на рис. 24.

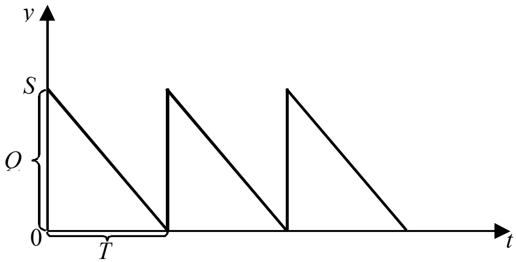


Рис. 24. График работы склада

Ранее отмечалось, что эффективность работы склада оценивается по его затратам на пополнение запасов и их хранение. Расходы, не зависящие от объема партии, называют накладными. Сюда входят почтово-телеграфные расходы, командировочные, некоторая часть транспортных расходов и др. Накладные расходы будем обозначать через K. Издержки хранения запасов будем считать пропорциональными величине хранящихся запасов и времени их хранения. Издержки на хранение одной единицы запасов в течение одной единицы времени называются величиной удельных издержек хранения; обозначим их через h.

При изменяющейся величине хранящихся запасов издержки хранения за некоторое время T получают путем умножения величины $h \cdot T$ на среднее значение величины запасов в течение этого времени T. Таким образом, затраты склада за время T при размере партии пополнения Q в случае идеального режима работы склада, представленного на рис. 24, равны $Z_T(Q) = K + h \cdot T \cdot \dfrac{Q}{2}$.

После деления этой функции на постоянную величину T с учетом равенства $Q = MT$ получим выражение для величины затрат на пополнение и хранение запасов, приходящихся на единицу времени:

$$Z_1(Q) = \frac{Z_T(Q)}{T} = \frac{K}{T} + h \cdot \frac{Q}{2} = \frac{K \cdot M}{Q} + h \cdot \frac{Q}{2}.$$

Это и будет целевой функцией, минимизация которой позволит указать оптимальный режим работы склада.

Найдем объем заказываемой партии Q, при котором минимизируется функция средних затрат склада за единицу времени, т.е. функция $Z_1(Q)$. На практике величина Q часто принимает дискретные значения, в частности, из-за использования транспортных средств определенной грузоподъемности; в этом случае оптимальное значение Q находят перебором допустимых значений Q. Мы будем считать, что ограничений на принимаемые значения Q нет, тогда задачу на минимум функции $Z_1(Q)$ можно решить методами дифференциального исчисления:

$$\frac{dZ_1}{dQ} = -\frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0\,,$$

откуда находим точку минимума $Q_{ОПТ}$:

$$Q_{ОПТ} = \sqrt{\frac{2KM}{h}}\,.$$

Эта формула называется *формулой Уилсона* (по имени английского ученого-экономиста, получившего ее в 20-х годах прошлого столетия).

Оптимальный размер партии, рассчитываемый по формуле Уилсона, обладает *характеристическим свойством:* размер партии Q оптимален тогда и только тогда, когда издержки хранения за время цикла T равны накладным расходам K.

Действительно, если $Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$ то издержки хранения за цикл равны $h\frac{Q}{2}T = h\frac{Q}{2}\frac{Q}{M} = h\frac{2KM}{2Mh} = K$.

Если же издержки хранения за цикл равны накладным расходам, т.е. $h\frac{Q}{2}T = h\frac{Q}{2}\frac{Q}{M} = K$, то

$$Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}\,.$$

Проиллюстрируем характеристическое свойство оптимального размера партии графически (рис. 25).

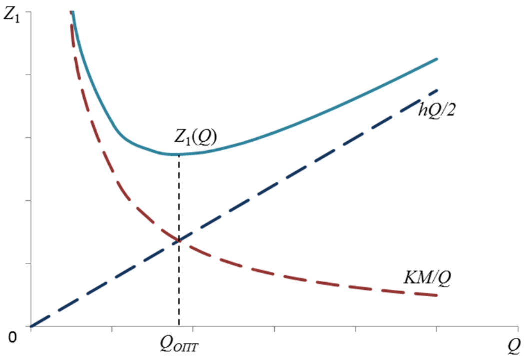


Рис. 25. График зависимости, отражающий поиск оптимального размера партии

На рис. 25 видно, что минимальное значение функции $Z_1(Q)$ достигается при том значении Q, при котором равны значения двух других функций, ее составляющих.

Используя формулу Уилсона, в сделанных ранее предположениях об идеальной работе склада можно получить ряд расчетных характеристик работы склада в оптимальном режиме:

оптимальный средний уровень запаса

$$\overline{Q}_{ОПТ} = \frac{Q_{ОПТ}}{2}\sqrt{\frac{KM}{2h}}\ ;$$

оптимальная периодичность пополнения запасов

$$T_{ОПТ} = \frac{Q_{ОПТ}}{M} = \sqrt{\frac{2K}{Mh}}\ ;$$

оптимальные средние издержки хранения запасов в единицу времени

$$\overline{H}_1 = Q_{ОПТ}h = \sqrt{\frac{KMh}{2}}\ .$$

6.3. Практический пример поиска оптимальной партии заказа

Машиностроительный завод покупает болты с гайками для сборочного участка, годовая потребность в которых составляет 50 тыс. штук в год. На данный момент имеется два предложения от разных поставщиков, условия которых приведены в табл. 6.

Таблица 6

Поставщик А		**Поставщик В**	
Количество	Цена за шт., руб.	Количество	Цена за шт., руб.
до 5000	5	до 9999	4,8
5000 – 19999	4,6	10000 – 29999	4,5
от 20000	4,4	от 30000	4,3

Стоимость хранения для завода можно оценить в 38% от стоимости единицы хранения в год. Стоимость оформления одного заказа – 1000 руб. Спрос в течение года на данные болты равномерный.

Каков оптимальный размер заказа с учетом скидок каждого из поставщиков? Какого поставщика следует предпочесть?

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

Решение:

Спрос на болты по условию задачи известный и постоянный, следовательно, мы можем без ограничений использовать модель экономичного размера заказа $Q_{ОПТ}$. При этом все издержки будут определяться полными издержками хранения и заказа за год. Однако имеется система скидок на базовые цены, а это значит, что отклонение от экономичного размера заказа может оказаться выгодным, если полученные скидки превышают рост издержек хранения. Значит к сумме издержек хранения и заказа нужно добавить общие затраты на покупку болтов, чтобы иметь возможность корректно сравнивать разные предложения.

Так как в данной задаче нам необходимо рассчитать оптимальный заказ для шести цен и количественных диапазонов (2 поставщика и 3 диапазона действия цен у каждого). Модель решения представлена на рис. 26.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Стоимость хранения единицы (h)	Стоимость заказа (K)	Годовая потребность (M)				
2	38%	1000	50000				
3	Поставщик	**Поставщик А**			**Поставщик В**		
4	Объем поставки						
5	максимальный	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
6	минимальный	1	5000	20000	1	10000	30000
7	Цена	5	4,6	4,4	4,8	4,5	4,3
8	Оптимальный размер заказа	=КОРЕНЬ(2*$B$2*$C$2/(B7*$A$2))					
9	Реальный размер заказа	=ОКРУГЛ(ЕСЛИ(И(B8>=B6;B8<=B5);B8;ЕСЛИ(B8<B6;B6;B5));0)					
10	Издержки хранения	=B9/2*B7*$A$2					
11	Издержки заказа	=$B$2*$C$2/B9					
12	Общие издержки хранения	=B10+B11					
13	Совокупные здержки заказа	=$C$2*B7+B12					

Рис. 26. Модель решения

В верхних ячейках A2:C2 запишем общие данные: издержки хранения, издержки заказа и годовую потребность. В строках B5:G5 и B6:G6 запишем верхние и нижние границы диапазонов скидок. Число 1 млн. в ячейках D5 и G5 заменяет бесконечную границу диапазона и выбрано произвольно, для упрощения формул.

Для расчета экономичного размера заказа используем стандартную формулу $Q = \sqrt{\dfrac{2KM}{h}}$. В нашей задаче величина h непостоянна, так как она зависит от цены товара, а цена может быть разной. Поэтому в расчетах вместо самой величины h будем использовать ее выражение через цену и издержку хранения в процентах.С этой поправкой формула для Q и записана в ячейке B8. После применения автозаплнения получаем результат, представленный в табл. 7.

Таблица 7

	Поставщик А			Поставщик В		
Объем поставки максимальный	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
минимальный	1	5000	20000	1	10000	30000
Цена	5	4,6	4,4	4,8	4,5	4,3
Оптимальный размер заказа	7254,76	7563,61	7733,60	7404,36	7647,19	7823,01

Если мы теперь сравним полученные значения Q с диапазонами количеств закупаемых болтов, для которых действуют те цены, по которым мы считали Q, то обнаружим несколько несоответствий. Например, при покупке болтов у поставщика А по цене 5 руб. за штуку оптимальная величина заказа равна примерно 7255 штук. Но такая цена действует только при покупке менее 5000 штук. Если мы будем закупать болты партиями по 7255 штук, то их цена будет только 4,6 руб. Это конечно неплохо, но мы ведь хотели выяснить, какую партию болтов лучше всего выбрать, если покупать их по цене 5 руб.

Ясно, что выбирать размер партии мы должны только внутри диапазона от 1 до 5000 штук. Какой же размер выбрать? Здесь нужно вспомнить, как выглядит график зависимости суммы издержек хранения и заказа от размера заказа. А именно, график этот показывает гладкую функцию без перегибов с одним минимумом. Это значит, что чем ближе размер заказа к Q, тем меньше издержки и наоборот. Следовательно, в тех случаях, когда мы не можем выбрать размер заказа равным Q, мы должны взять реально возможную величину заказа, наиболее близкую к экономичному размеру заказа.

В случае с покупкой болтов по цене 5 руб. – это верхняя граница диапазона, т.е. 4999 штук. Поэтому в модель кроме строки для расчета Q (Оптимальный размер заказа) добавлена строка Реальный размер заказа. В этой строке необходимо записывать тот размер заказа, который выбирается на самом деле. Конечно, можно выбирать реальный размер заказа отличным от теоретически оптимального не только из-за диапазонов действия цен. Скажем, во втором столбце значение Q равно 7563,6 и оно попадает в диапазон действия цены 4,6 руб. – от 5000 до 19999. Но не можем же мы заказать дробное число болтов. Значит, как минимум надо выбрать реальный размер заказа, как округленное до целых значений Q. Кроме того, часто бывает, что штучный товар фасуется в стандартную тару. В этом случае нужно заказывать партию так, чтобы получалось целое число коробок или ящиков и т.п. Могут быть и другие причины, заставляющие отклоняться от теоретической величины оптимального заказа. Поэтому не существует никакой стандартной формулы для реального Q.

В сложных случаях реальный размер Q можно проставить вручную с учетом известных вам условий. А в нашей задаче можно написать и формулу, так как выбор достаточно прост. Такая формула и записана в ячейке B9.

Формулы для расчета издержек хранения, издержек заказа и общих издержек хранения приведены в ячейках B10, B11, B12 соответственно.

Полная величина издержек поставки включает в себя не только затраты на хранение, но и сумму, истраченную на покупку годового запаса болтов. Годовой запас здесь взят потому, что издержки хранения и заказа тоже вычислены в расчете на год.

В результате расчетов получаем таблицу поставок (табл. 8).

Таблица 8

Объем поставки	**Поставщик А**			**Поставщик В**		
максимальный	4999	19999	1000000	9999	29999	1000000
минимальный	1	5000	20000	1	10000	30000
Цена	5	4,6	4,4	4,8	4,5	4,3
Оптимальный размер заказа	7254,76	7563,61	7733,60	7404,36	7647,19	7823,01
Реальный размер заказа	4999	7564	20000	7404	10000	30000
Издержки хранения	4749,05	6610,94	16720,00	6752,45	8550,00	24510,00
Издержки заказа	10002,00	6610,26	2500,00	6753,11	5000,00	1666,67
Общие издержки хранения	14751,05	13221,20	19220,00	13505,55	13550,00	26176,67
Совокупные издержки заказа	264751,05	243221,20	239220,00	253505,55	***238550,00***	241176,67

В последней строке таблицы выведены наименьшие возможные издержки при покупке болтов по каждой из шести предложенных цен.

Из этих шести значений издержек наименьшей оказывается 238550 руб., которая получается при покупке болтов у поставщика В партиями по 10 тыс. штук по цене 4,5 руб. за штуку.

Из таблицы видно, что покупка болтов по меньшей цене, но более крупными партиями по 20-30 тыс. штук оказывается чуть дороже, так как предлагаемые скидки полностью съедаются потерями от замораживания капитала при такой политике закупок.

Чтобы постоить график реализуем модель представленную на рис. 27. Диапазон изменения Q выберем от 0 до 12000.

	A	B	C	D
17	стоимость хранения единицы	=F7*A2		
18	Потребность	=C2		
19	Стоимость заказа	=B2		
20				
21	Q	0	2000	4000
22	Издержки хранения	=$B$17*B21/2		
23	Издержки заказа	=$B$18*$B$19/B21		
24	Полные издержки хра	=B22+B23		

Рис. 27. Модель решения

Выделим диапазон ячеек A21:H24 и посторим точечную диаграмму (рис. 28).

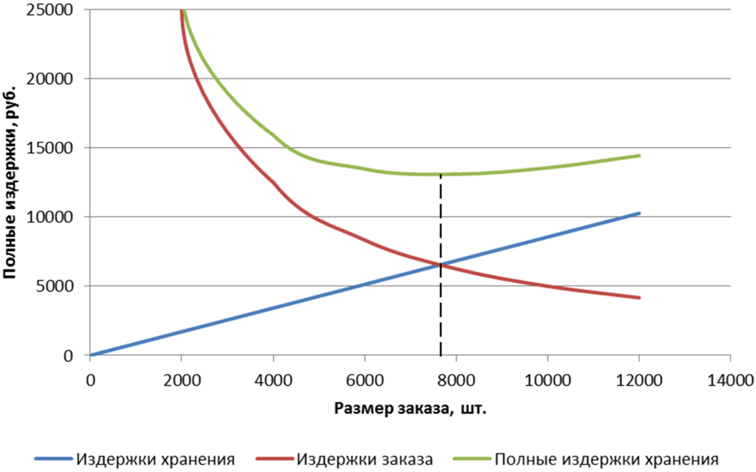


Рис. 28. Зависимость полных издержек от размера заказа

7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.1. Структура контрольной работы

Структуру контрольной работы образуют три практических заданий.

Вариант задания вычисляется по алгоритму: рассматриваются две последние цифры зачетной книжки студента, определяемое ими двузначное число делится на 10, к получаемому в результате деления остатку прибавляем единицу и получаем номер варианта. Например, номер зачетной книжки равен 12453789, число 89 делим на 10, в остатке получаем 9, прибавляя 1, получаем номер варианта – 10. Следовательно, студент излагает в контрольной работе практические задания 10 варианта.

Контрольная работа представляется преподавателю для проверки в двух видах: обычном, на бумажных листах формата А4 (твердая копия), и в электронном виде.

7.2. Варианты заданий контрольной работы

ВАРИАНТ 1

Задание 1

Для выпуска двух видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Нормы затрат ресурсов на производство единицы продукции каждого вида, прибыль на единицу продукции каждого вида, а также запасы ресурсов, которые могут быть использованы предприятием, приведены в табл. 9.

Таблица 9

Ресурс	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции		Запасы ресурсов
	Продукт 1	Продукт 2	
Сырье	3	5	60
Рабочее время	22	14	250
Оборудование	10	14	128
Прибыль на единицу продукции	30	25	

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект строительства нового здания. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 10 и 11.

Таблица 10

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	9
B	10
C	6
D	5
E	16
F	12
G	14
H	15
I	11
J	3

Таблица 11

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	C, D и E – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно
2	Работа A следует за C, а работа F начинается сразу по окончании работы A
3	Работа G следует за F
4	Работа B следует за D, а работы I и J следуют за B
5	Работа H следует за I и E, но не может начаться, пока не завершена G

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Строительная фирма, специализирующаяся на кровельных работах, использует большое количество металлочерепицы (около 35000 м^2 в год). При небольших закупках, скажем на одну кровлю (~ 150 м^2), один метр черепицы стоит 10,2 ДЕ. При заказе 900 м^2 и более цена 1 м^2 снижается на 0,5 ДЕ. При крупных заказах свыше 3000 м^2 скидка составляет уже 7,5% и наконец при заказе партии в 8000 м^2 дилер устанавливает цену в 9,3 за м^2, т.к. это количество составляет ровно 1 контейнер и дилеру не приходится самому формировать заказ. Издержки по оформлению заказа и его доставке составляют 500 ДЕ.

Стоимость хранения можно оценить в 15% от цены 1 м^2.

Учтите, что вследствие некоторых обстоятельств неэкономического характера, перенос запасов на следующий год крайне нежелателен.

Какой план заказов Вы бы предложили в этой ситуации?

Каковы были бы издержки в этом случае?

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

ВАРИАНТ 2

Задание 1

Цех выпускает два вида деталей – *А* и *Б*. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется следующими данными (табл. 12). Составить план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

Таблица 12

Станок	Длительность обработки детали, мин		Запасы ресурсов
	Деталь А	Деталь Б	
Станок 1	12	10	220
Станок 2	15	18	370
Станок 3	6	4	100
Отпускная цена за одну деталь	30	32	

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект строительства нового цеха. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 13 и 14.

Таблица 13

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	3
B	5
C	6
D	9
E	7
F	2
G	6
H	9
I	4
J	6
K	7

Таблица 14

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	A, F и G – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно
2	Работы H и B начинаются сразу по окончании работы F
3	Работа J следует за A, а работа I – за G
4	Работа E следует за H
5	Работы C и K следуют за B и I, но не могут начаться, пока не завершена J
6	Работа D следует за E и C

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Экономическая структура состоит из трех отраслей. Пусть на плановый период заданы матрица коэффициентов прямых затрат ***A*** и вектор конечной продукции ***Y***.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{vmatrix} 50 \\ 40 \\ 80 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать плановые объемы выпуска валовой продукции, величину межотраслевых потоков, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

ВАРИАНТ 3

Задание 1

Цех выпускает два вида продукции – A и B, используя при этом последовательно три станка. Данные о технологическом процессе указаны с табл. 15. Составить план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Таблица 15

Станок	Трудоемкость на одну единицу продукции		Фонд времени, ч
	Деталь A	Деталь B	
Станок 1	3	3	150
Станок 2	2	6	180
Станок 3	1	2	80
Прибыль на единицу продукции	2	3	

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект выпуска новой продукции. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 16 и 17.

Таблица 16

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	10
B	8
C	4
D	12
E	7
F	11
G	5
H	8
I	3
J	9
K	10

Таблица 17

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	Работы C, I, G являются исходными работами проекта, которые могут выполняться одновременно
2	Работы E и A следуют за работой C
3	Работа H следует за работой I
4	Работы D и J следуют за работой G
5	Работа B следует за работой E
6	Работа K следует за работами A и D, но не может начаться прежде, чем не завершится работа H
7	Работа F следует за работой J

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Гостиница должна менять 2000 комплектов постельного белья ежегодно. При покупке белья действуют цены и скидки, представленные в табл. 18.

Таблица 18

Количество комплектов	1 – 99	100 – 499	500 и более
Цена одного комплекта, ДЕ	20	19	18

Цена хранения одного комплекта на складе 23% от стоимости в год. Расходы по оформлению и размещению заказа на складе 100 ДЕ за каждый заказ.

Определить оптимальный размер заказа, количество заказов в год и полную стоимость заказа.

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

ВАРИАНТ 4

Задание 1

На заводе используется сталь трех марок A, B и C, запасы которых соответственно 10, 16 и 12 единиц. Завод выпускает два вида изделий. Для изделия № 1 требуется по одной единице стали всех марок. Для изделия № 2 требуется две единицы стали марки B , одна единица – марки C и не требуется сталь марки A. От реализации единицы изделия № 1 завод получает три усл. ден. ед. прибыли, изделия № 2 – две усл. ден. ед. (табл. 19). Составить план выпуска продукции , дающий наибольшую прибыль.

Таблица 19

Ресурсы	Нормы расхода ресурса на 1 ед. изделия		Общее количество ресурса
	Изделие № 1	Изделие № 2	
Сталь марки A	1	0	10
Сталь марки B	1	2	16
Сталь марки C	1	1	12
Прибыль	3	2	

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект выпуска нового изделия. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 20 и 21.

Таблица 20

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	8
B	6
C	6
D	8
E	3
F	4
G	7
H	7
I	12
J	9
K	5

Таблица 21

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	A, E и F исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно
2	Работы B и I начинаются сразу по окончании работы F
3	Работа J следует за E, а работа C – за A
4	Работы H и D следуют за B, но не могут начаться, пока не завершена C
5	Работа K следует за I
6	Работа G начинается после завершения H и J

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Экономическая структура состоит из трех отраслей. Пусть на плановый период заданы матрица коэффициентов прямых затрат ***A*** и вектор конечной продукции ***Y***.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{vmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать плановые объемы выпуска валовой продукции, величину межотраслевых потоков, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

ВАРИАНТ 5

Задание 1

Для изготовления двух видов изделий *A* и *B*, используется токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия указаны в табл. 22. В таблице также указан общий фонд рабочего времени, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида. Требуется определить, сколько изделий следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Таблица 22

Тип оборудования	Затраты времени на обработку изделия, станко-ч		Общий фонд рабочего времени (ч)
	A	B	
Фрезерное	2	4	120
Токарное	1	8	280
Сварочное	7	4	240
Прибыль	10	14	

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект пуска и наладки компьютерной системы. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 23 и 24.

Таблица 23

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	3
B	4
C	1
D	4
E	5
F	7
G	6
H	5
I	8

Таблица 24

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	D – исходная работа проекта
2	Работа E следует за D
3	Работы A, G и C следуют за E
4	Работа B следует за A
5	Работа H следует за G
6	Работа F следует за C
7	Работа I начинается после завершения B, H, и F

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Крупный магазин использует 12 000 бумажных рулонов для чековых аппаратов в год. Каждый новый заказ чистых рулонов стоит 150 ДЕ, а издержки хранения одного рулона составляют 30% от его стоимости в год. Цена одного рулона равна 1,90 ДЕ, если размер заказа до 2999 рулонов; 1,82 ДЕ если размер заказа от 3000 до 5999 рулонов, 1,74 ДЕ, если размер заказа 6000 и выше.

Рассчитайте экономический размер заказа для каждого диапазона цен, какой реальный размер заказа может быть выбран в каждом из вариантов цен?

Какой размер заказа выбрали бы Вы и как часто Вам пришлось бы делать очередной заказ? Каковы полные издержки в этом случае?

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

ВАРИАНТ 6

Задание 1

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в табл. 25. Определить сколько столов и шкафов фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц

Таблица 25

Ресурс	Нормы затрат на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина: 1-й вид	0,2	0,1	40
2-й вид	0,1	0,3	60
Трудоемкость (чел-ч.)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации единицы изделия (ДЕ)	6	8	

Задание 2

На предприятии реализуется проект пуска и наладки новой линии по переработке сырья. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 26 и 27.

Таблица 26

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	5
B	5
C	4
D	7
E	12
F	3
G	6
H	2
I	8
J	3

Таблица 27

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	C, E и F – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно
2	Работа A начинается сразу по окончании работы C
3	Работа H следует за F
4	Работа I следует за A, а работы D и J – за H
5	Работа G следует за E, но не может начаться, пока не завершены D и I
6	Работа B следует за G и J

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Экономическая структура состоит из трех отраслей. Пусть на плановый период заданы матрица коэффициентов прямых затрат $\boldsymbol{A}$ и вектор конечной продукции $\boldsymbol{Y}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}0 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{vmatrix} 200 \\ 100 \\ 200 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать плановые объемы выпуска валовой продукции, величину межотраслевых потоков, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

ВАРИАНТ 7

Задание 1

На звероферме могут выращивать черно-бурых лисиц и песцов. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в табл. 28. Также в таблице указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Определить сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкур была максимальной.

Таблица 28

Вид корма	Ежедневное количество единиц корма		Общее количество корма
	лисица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки (усл. ден.ед.)	16	12	

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект внедрения новой технологии по выпуску готовой продукции. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 29 и 30.

Таблица 29

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	12
B	8
C	15
D	9
E	14
F	9
G	15
H	10
I	11
J	13

Таблица 30

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	C, J и D – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно
2	Работа A следует за D, а работа I – за A
3	Работа H следует за I
4	Работа F следует за H, но не может начаться, пока не завершена C
5	Работа G следует за I
6	Работа E следует за J, а работа B – за E

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Военный госпиталь должен менять 1200 комплектов постельного белья ежегодно. Цена одного комплекта 320 руб. Надежный поставщик, с которым госпиталь давно сотрудничает, делает скидки на оптовые закупки белья, представленные в табл. 31.

Таблица 31

Количество комплектов	100...299	300…999	1000…5000
Цена одного комплекта, руб.	300	280	270

Интендантское ведомство полагает, что стоимость хранения одного комплекта на складе составляет 15% стоимости в год. Расходы по оформлению и размещению заказа на складе 800 руб. за каждый заказ.

Определить оптимальный размер заказа, количество заказов в год и полную стоимость заказа.

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

ВАРИАНТ 8

Задание 1

Компания специализируется на выпуске хоккейных клюшек и наборов шахмат. Каждая клюшка приносит компании прибыль в размере 2 ден. ед., а каждый шахматный набор – в размере 4 ден. ед. На изготовление одной клюшки требуется 4 ч работы на участке А и 2 ч работы на участке В. Шахматный набор изготавливается с затратами 6 часов на участке А, 6 ч на участке В и 1 ч на участке С. Доступная производственная мощность участка А составляет 120 н-ч в день, участка В – 72 н-ч и участка С – 10 н-ч. Сколько клюшек и шахматных наборов должна выпускать компания ежедневно, чтобы получать максимальную прибыль?

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект строительства нового административного здания. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 33 и 34.

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Таблица 32

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	12
B	6
C	10
D	7
E	9
F	8
G	10
H	10
I	6
J	5

Таблица 33

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	D – исходная работа проекта
2	Работы C, E и F начинаются сразу по окончании работы D
3	Работы A и J следуют за C, а работа G – за F
4	Работа I следует за A, а работа B – за G
5	Работа H начинается после завершения E, но не может начаться, пока не завершены I и B

Задание 3

Экономическая структура состоит из трех отраслей. Пусть на плановый период заданы матрица коэффициентов прямых затрат $\boldsymbol{A}$ и вектор конечной продукции $\boldsymbol{Y}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{vmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать плановые объемы выпуска валовой продукции, величину межотраслевых потоков, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

ВАРИАНТ 9

Задание 1

Фабрика изготовляет два вида красок: для внутренних и наружных работ. Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу.

Для производства красок используются три исходных продукта A, B и C. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 56, 80 и 117 т соответственно. Расходы продуктов A, B и C на 1 т соответствующих красок и максимально возможный запас приведены в табл. 11. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Таблица 34

Вид исходного продукта	Расход продуктов на 1 т красок		Суточные запасы исходных продуктов
	краска для наружных работ	краска для внутренних работ	
A	1	2	56
B	2	1	80
C	3	1	117
Оптовые цены 1 т красок	3	2	

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект внедрения нового вида продукции. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 36 и 37.

Таблица 35

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	9
B	3
C	12
D	6
E	8
F	4
G	7
H	10
I	7
J	12

Таблица 36

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	F, C и B – исходные работы проекта, которые можно начинать одновременно
2	Работа E следует за F
3	Работа A следует за B, а работа G – за A
4	Работы D и J следуют за E
5	Работа I следует за C, но не может начаться, прежде чем закончатся J и G
6	Работа H следует за D

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Компания занимается сборкой жидкокристаллических мониторов на заводе «Квант». Поставки жидкокристаллических панелей и комплектующих деталей осуществляются из Кореи. Большую часть общей стоимости 15-дюймого ЖК-монитора составляет стоимость панели. Поэтому компания стремится минимизировать расходы на данный определяющий фактор.

В настоящее время основным поставщиком ЖК-панелей для компании является фирма «CARDINAL». Однако фирма «SYSCOM», давний партнер компании, вышла с новыми предложениями по поставке панелей в следующем году.

Таблица 37

CARDINAL		SYSCOM	
Количество	Цена, ДЕ	Количество	Цена, ДЕ
До 3000	204	До 5000	205
3000-6000	201	5000-10000	200
Свыше 6000	198	Свыше 10000	196

Издержки хранения панели оцениваются примерно в 31% в год от стоимости. Расходы по оформлению и доставке составляют 10000 ДЕ.

Панели пакуются в стандартные короба по 96 штук. Планируемая потребность в будущем году – 50000 панелей.

Определите, какой поставщик предлагает более выгодные условия.

Какие панели и какой размер заказа следует выбрать при одинаковом качестве панелей и одинаковой стоимости доставки?

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

ВАРИАНТ 10

Задание 1

Мастерская имеет в своем распоряжении определенное количество производственных ресурсов: трудовые, денежные средства, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Для получения оптимального плана рассмотрите использование ресурсов трех видов – трудовые, сырье и оборудование, которые имеются в количестве соответственно 60, 28 и 42 единицы. Мастерская выпускает ковры двух видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида (о нормах расхода производственных ресурсов), и доходах, получаемых предприятием от реализации единицы каждого вида товаров, приведена в табл. 39.

Таблица 38

Ресурс	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия		Наличие ресурсов
	Ковер *A*	Ковер *B*	
Труд	4	2	60
Сырье	1	1	28
Оборудование	3	1	42
Цена	14	10	

Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором будет получен максимальный доход от реализации продукции (сбыт всей выпущенной продукции обеспечен).

В работе необходимо сформулировать экономико-математическую модель задачи в виде задачи линейного программирования; построить многогранник решений (область допустимых решений) и найти оптимальную производственную программу путем перебора его вершин и геометрическим способом; привести задачу линейного программирования к канонической форме и решить ее с помощью симплекс-таблиц.

Задание 2

На предприятии реализуется проект внедрения нового оборудования по выпуску конкурентного продукта. Исходные данные проекта, которые включают название и продолжительность каждой работы, а также описание упорядочения работ приведены в табл. 40 и 41.

Таблица 39

Исходные данные

Название работы	Продолжительность работы
A	7
B	6
C	8
D	9
E	10
F	11
G	5
H	9
I	12
J	6

Таблица 40

Упорядочение работ

№ п/п	Порядок работ
1	G – исходная работа проекта
2	Работы A, I и D следуют за G и могут выполняться одновременно
3	Работы C и J следуют за A, работа F – за I, а работа B – за D
4	Работа E следует за C
5	Работа H следует за B, но не может начаться, пока не завершена F

Построить сетевой график. Определить основные параметры сетевого графика (критический путь, резервы времени событий и резервы времени работ).

Задание 3

Экономическая структура состоит из трех отраслей. Пусть на плановый период заданы матрица коэффициентов прямых затрат $\boldsymbol{A}$ и вектор конечной продукции $\boldsymbol{Y}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{vmatrix} 100 \\ 50 \\ 150 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать плановые объемы выпуска валовой продукции, величину межотраслевых потоков, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

Для откорма животных употребляют 2 корма – 1 и 2. Стоимость 1 кг корма 1 – 5 ден. ед., корма 2 – 2 ден. ед. В каждом килограмме корма 1 содержится 5 ед. витамина А, 2,5 ед. витамина В и 1 ед. витамина С. В каждом килограмме корма 2 содержится 3 ед. витамина А, 3 ед. витамина В и 1 ед. витамина С. Какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на откорм были минимальны, если суточный рацион предусматривает не менее 225 питательных единиц витамина А, не менее 150 ед. витамина В и не менее 80 ед. витамина С?

Задание 2

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-часов. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 тонны молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 ден. ед. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной?

Задание 3

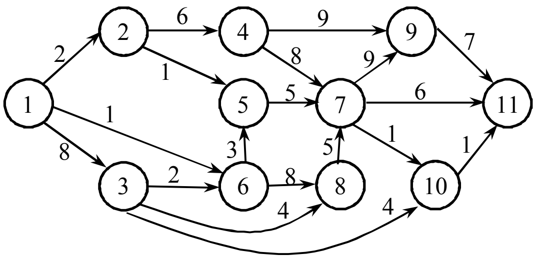
При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества A, не менее 50 ед. вещества B и не менее 12 ед. вещества C. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание единиц в 1 кг каждого из видов корма приведено в табл. 41. Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ, при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг корма I вида составляет 9 ден. ед., корма II вида – 12 ден. ед. и корма III вида – 10 ден. ед.

Таблица 41

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма вида		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Задание 4

Для заданной сетевой модели некоторого комплекса работ определить основные параметры сетевого графика. Расчеты выполнить в программе Excel.



Задание 5

Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A, B, C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку, фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 тонны карамели, общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано фабрикой, прибыль от реализации 1 тонны карамели каждого вида представлены в табл. 42.

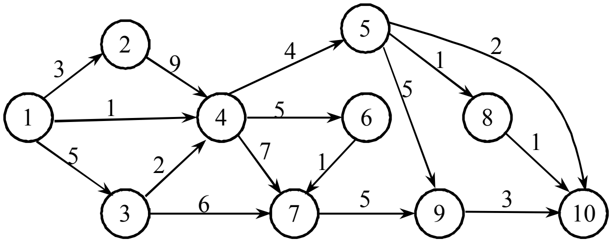
Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

Таблица 42

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т карамели			Общее количество сырья, т
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,8	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	–	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции (ден. ед.)	108	112	126	

Вариант 6

Для заданной сетевой модели некоторого комплекса работ определить основные параметры сетевого графика. Расчеты выполнить в программе Excel.



Вариант 7

Завершите составление баланса, располагая следующими данными об экономической системе, состоящей из трех экономических объектов (например, Р1 – промышленность, Р2 – сельское хозяйство, Р3 – транспорт). Прочерки в табл. 1 означают, что $X_{22} = X_{31} = 0$.

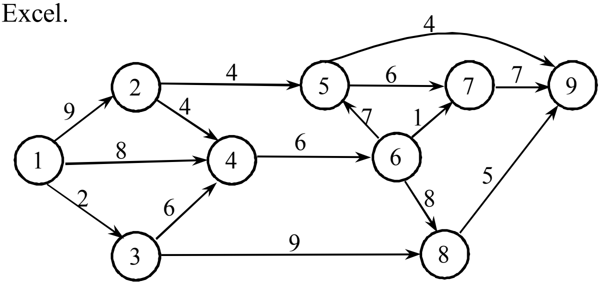
Таблица 43

Отрасли	P1	P2	P3	Σ	Y	X
P1	20	50			200	300
P2	10	-	40			500
P3	-				240	
Σ				310		
V		390				
X						

Выполните расчет коэффициентов прямых затрат, а также постройте обратную матрицу Леонтьева. Все расчеты выполнить в программе Excel.

Вариант 8

Для заданной сетевой модели некоторого комплекса работ определить основные параметры сетевого графика. Расчеты выполнить в программе Excel.



Вариант 9

В табл. 44 приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден.ед.

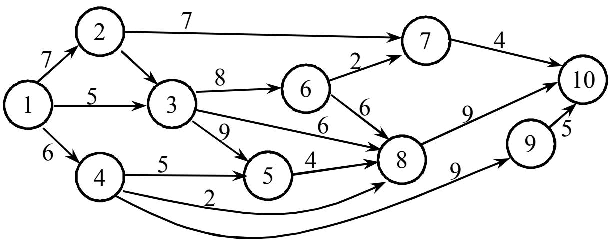
Таблица 44

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	0,4	0,25	300
	Сельское хозяйство	0,5	0,4	200

Найти плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей; необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 30%, а промышленности на 40%.

Вариант 10

Для заданной сетевой модели некоторого комплекса работ определить основные параметры сетевого графика. Расчеты выполнить в программе Excel.



Вариант 11

Завершите составление баланса, располагая следующими данными об экономической системе, состоящей из трех экономических объектов (например, P1 – промышленность, P2 – сельское хозяйство, P3 – транспорт). Прочерки в табл. 8 означают, что $X_{12} = X_{33} = 0$.

Таблица 45

Отрасли	P1	P2	P3	Σ	Y	X
P1	67	-			187	800
P2	82	26	41			691
P3			-		337	
Σ				497		
V		222				
X						

Выполните расчет коэффициентов прямых затрат, а также постройте обратную матрицу Леонтьева. Все расчеты выполнить в программе Excel.

Вариант 12

Совхоз нуждается в двойном суперфосфате в количестве 200 тонн в год в ближайшие несколько лет. Главный агроном нашел через Интернет предложение солидной компании, осуществляющей поставки фасованных в полипропиленовые мешки удобрений. Эта компания работает с мелкими и средними потребителями удобрений, при этом для различных объемов поставок действуют различные цены (табл. 46).

Таблица 46

Заказываемое количествово	Цена единицы, руб. за 1 кг.
До 10 тонн	7,00
От 10 тонн до 1 вагона	6,30
1 или 2 вагона	5,87
Больше 2 вагонов	5,46

Совхоз готов закупать удобрения в течение 6 месяцев в году, когда имеется возможность вносить их в почву. Издержки, связанные с заказом партии и ее поставкой составляют 9000 руб.

Внутренняя норма прибыли совхоза может быть оценена в 70% в год.

Один вагон соответствует 50 тоннам. По территории совхоза проходит железнодорожный путь, имеется разгрузочная площадка со складом, так что дополнительные транспортные расходы пренебрежимо малы.

Какой размер заказа минимизирует общие затраты? Каковы они для идеального случая?

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

Вариант 13

Фирма ТорАгро-В должна закупать сырье для производства специального ветеринарного препарата в количестве 4 тонн в год. Закупка может быть сделана у двух разных поставщиков.

Поставщик из Ярославля предлагает следующие условия продажи:

при покупке менее 100 кг	–	20,00 ДЕ за 1 кг
от 100 кг до 500 кг	–	19,50 ДЕ за 1 кг
от 500 кг и более	–	19,10 ДЕ за 1 кг.

Поставщик из Тульской области предлагает другие цены и пороги скидок:

при покупке менее 200 кг	–	19,60 ДЕ за 1 кг.
от 200 кг до 999 кг	–	19,10 ДЕ за 1 кг.
от 1000 кг и более	–	18,50 ДЕ за 1 кг.

Издержки хранения для фирмы ТорАгро-В можно принять равными 55% от стоимости сырья в год. Стоимость исполнения заказа – 50 ДЕ.

Рассчитайте экономичные размеры заказов для каждого предложения. Какое предложение самое выгодное для ТорАгро-В? Какими партиями следует покупать сырье? Подтвердите все свои выводы расчетами.

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

Вариант 14

Строительная фирма, специализирующаяся на кровельных работах, использует большое количество металлочерепицы (около 20000 кв. м в год). При небольших закупках, скажем на одну кровлю (~ 150 кв. м), один метр черепицы стоит 9,5 ДЕ. При заказе 800 кв. м и более цена 1 кв. м снижается на 0,6 ДЕ. При крупных заказах свыше 3000 кв. м скидка составляет уже 8% и наконец, при заказе партии в 9000 кв. м дилер устанавливает цену в 8,5 ДЕ за кв. м, т.к. это количество составляет ровно 1 контейнер и дилеру не приходится самому формировать заказ. Издержки по оформлению заказа и его доставке составляют 600 ДЕ.

Стоимость хранения можно оценить в 16% от цены 1 кв. м.

Учтите, что вследствие некоторых обстоятельств неэкономического характера, перенос запасов на следующий год крайне нежелателен.

Какой план заказов Вы бы предложили в этой ситуации? Каковы были бы издержки в этом случае?

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

Вариант 15

Городская больница должна менять 1600 комплектов постельного белья ежегодно. Цена одного комплекта 1245 руб. Надежный поставщик, с которым госпиталь давно сотрудничает, делает скидки на оптовые закупки белья, представленные в табл. 47.

Таблица 47

Количество комплектов	100...299	300…999	1000…5000
Скидка на цену одного комплекта, руб.	3%	6%	18%

Горздравотдел полагает, что стоимость хранения одного комплекта на складе составляет 18% стоимости в год. Расходы по оформлению и размещению заказа на складе 3200 руб. за каждый заказ.

Определить оптимальный размер заказа, количество заказов в год и полную стоимость заказа.

Постройте график зависимости полных издержек оптимального заказа от размеров заказа.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. Экономико-математическая модель (ЭММ). Понятие, пример, общая классификация ЭММ.
2. Модели и моделирование. Классификация моделей. Адекватность моделей.
3. Этапы экономико-математического моделирования.
4. Задача линейного программирования: основные понятия, общий вид, типы задач.
5. Дайте определения математической модели, плана, допустимого плана, оптимума, области допустимых решений.
6. Как решить задачу линейного программирования методом перебора вершин?
7. Как решить задачу линейного программирования методом градиента?
8. Назовите условия разрешимости задачи и единственности решения задачи линейного программирования.
9. Сформулируйте основные теоремы симплекс-метода.
10. Дайте определения базисных и свободных переменных, решений оптимальных и допустимых.
11. Как заполнить симплекс-таблицу?
12. Объясните алгоритм перехода от одной симплекс-таблицы к другой.
13. Назовите этапы нахождения оптимального плана симплекс-методом.

14. Что называется событием, работой, путем?
15. Воспроизведите алгоритм построения сетевого графика.
16. Какие данные необходимы для построения сетевого графика?
17. Сформулируйте правила составления сетевого графика.
18. Перечислите основные параметры сетевого графика.
19. Назовите критерии оптимальности сетевого графика.
20. Укажите способы построения линейного графика.
21. Перечислите основные параметры линейного графика.
22. Что такое матричная модель?
23. Как матричное моделирование можно использовать в производственном планировании?
24. Поясните экономический смысл матриц N, A, K, M, L, Q, T.
25. Какие основные задачи решаются на основе межотраслевого баланса?
26. Поясните сущность балансового метода.
27. Дайте характеристику структуры межотраслевого баланса. В чем выражается балансовый характер этой таблицы?
28. Приведите основные уравнения балансового метода.
29. Дайте определение и экономическую интерпретацию коэффициентов прямых затрат.
30. В чем заключается сущность математического аппарата метода межотраслевого баланса?
31. Как классифицируются балансовые модели?
32. Что такое модель управления запаса? Раскройте основные понятия модели управления запасов
33. Какие существуют принципиальные схемы управления запасами?
34. Раскройте основные допущения и упрощения модели экономически выгодных размеров заказываемых партий.
35. Выполните вывод формулы Уилсона.
36. Как посторить график зависимости, отражающий поиск оптимального размера партии?

ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Задание №1. Какие задачи решаются методом линейного программирования?

1) поиск экстремума линейной функции при линейных ограничениях
2) поиск экстремума линейной функции при нелинейных ограничениях
3) поиск экстремума функции при линейных ограничениях
4) поиск экстремума линейной функции при отсутствии ограничений

Задание №2. Что является решением задачи линейного программирования?

1) значение целевой функции
2) значение коэффициентов целевой функции
3) значения переменных целевой функции
4) значения коэффициентов в системе ограничений

Задание №3. Какое решение является допустимым в линейном программировании?

1) любое
2) любое, обеспечивающее выполнение ограничений
3) любое, обеспечивающее выполнение только связанных ограничений
4) любое, обеспечивающее выполнение только несвязанных ограничений

Задание №4. Какое решение является оптимальным в линейном программировании?

1) доставляющее экстремум целевой функции при выполнении ограничений
2) доставляющее экстремум целевой функции
3) любое, обеспечивающее выполнение ограничений
4) это зависит от конкретного содержания задачи

Задание №5. Математическая модель задачи линейной оптимизации может быть записана _______________ форме.

1) стандартной
2) Лагранжа
3) канонической
4) симметричной

Задание №6. Для решения задач линейной оптимизации можно использовать следующий математический аппарат

1) метод наименьших квадратов
2) симплексный метод
3) метод аппроксимации
4) графический метод

Задание №7. Геометрической интерпретацией целевой функции в задаче линейного программирования с двумя переменными является

1) точки на плоскости
2) многоугольник допустимых планов
3) линии уровня
4) точки внутри многоугольника допустимых планов

Задание №8. Признаком оптимальности при решении задачи максимизации линейного программирования симплексным методом является

1) неотрицательность элементов столбца свободных членов
2) неотрицательность элементов строки целевой функции
3) неположительность элементов строки целевой функции
4) неположительность элементов столбца свободных членов

Задание №9. Выберете верное утверждение

1) область допустимых решений задачи линейной оптимизации может состоять из нескольких разрозненных областей
2) область допустимых решений задачи линейной оптимизации всегда ограничена
3) область допустимых решений задачи линейной оптимизации должна быть выпукла

Задание №10. Укажите основные свойства области допустимых планов задачи линейного программирования

1) выпуклость
2) замкнутость
3) непрерывность
4) разомкнутость

Задание №11. Составление и анализ соответствующих календарных планов представляют собой весьма сложную задачу, при решении которой применяется так называемый метод

1) сетевого планирования
2) анализа иерархии
3) линейного программирования
4) баланса

Задание №12. _______________ - это момент начала или завершения одной или нескольких работ

1) Событие
2) Работа
3) Сетевой график

Задание №13. Выберите виды событий, которые изображаются на сетевой графике

1) начальное
2) конечное
3) промежуточные
4) действительные
5) фиктивные

Задание №14. Выберите виды работ, которые могут быть изображены на сетевом графике

1) начальное
2) конечное
3) промежуточные
4) действительные
5) фиктивные

Задание №15. ________________ - это любой трудовой процесс, сопровождающийся затратой времени и приводящий к нужным результатам

1) Событие
2) Работа
3) Сетевой график

Задание №16. ________________ - это реальный процесс, приводящий к достижению конкретных результатов и требующий затрат определенных ресурсов (материальных средств, времени, персонала)

1) Действительная работа
2) Фиктивная работа
3) Работа
4) Критическая работа

Задание №17. _________________ не требует затрат ресурсов и времени, на графике она изображается пунктирной дугой

1) Действительная работа
2) Фиктивная работа
3) Работа
4) Критическая работа

Задание №18. Любая последовательность работ, соединяющая каких-либо два события, называется _______________

1) сетевым графиком
2) путем
3) полным путем
4) критическим путем

Задание №19. Путь, соединяющий исходное и конечное событие через последовательность работ, называется __________________ сетевого графика

1) сетевым графиком
2) путем
3) полным путем
4) критическим путем

Задание №20. Полный путь максимальной продолжительности называется ______________________

1) сетевым
2) фиктивным
3) полным
4) критическим

Задание №21. _________________ - максимальная продолжительность времени выполнения всех работ от исходного события до рассматриваемого события

1) Ранний срок свершения события
2) Поздний срок свершения события
3) Резерв времени свершения события

Задание №22. _________________ - максимальный допустимый срок наступления рассматриваемого события, не приводящий к увеличению критического пути

1) Ранний срок свершения события
2) Поздний срок свершения события
3) Резерв времени свершения события

Задание №23. _____________ показывает, насколько можно сдвинуть срок наступления рассматриваемого события в сторону его увеличения, не увеличивая при этом критического пути

1) Ранний срок свершения события
2) Поздний срок свершения события
3) Резерв времени свершения события

Задание №24. Под ________________ технологического графика понимается его улучшение с целью уменьшения времени выполнения комплекса работ при заданном количестве сил и средств

1) оптимизацией
2) реализацией
3) реструктуризацией
4) моделированием

Задание №25. Критериями оптимальности сетевого графика могут служить

1) коэффициенты загруженности
2) коэффициенты простоя
3) коэффициенты резервов времени
4) коэффициенты оптимальности

Задание №26. Система управления запасами, применяемая в модели Уилсона - это ______________________

1) система с фиксированным размером заказа
2) система с фиксированной периодичностью заказа
3) саморегулирующиеся системы
4) управляющие системы
5) системы формирования заказа

Задание №27. Скорость расходования запасов со склада в классической модели формирования заказа величина ____________

1) постоянная
2) переменная
3) любая

Задание №28. Время разгрузки прибывшей партии пополнения запасов мало, и принято считать его равным ___________

1) единице
2) нулю
3) пяти
4) восьми

Задание №29. Какие простые принципиальные системы регулирования товарных запасов, основанные на различных стратегиях пополнения запасов, используются в практической деятельности организаций и служб маркетинга?

1) система с фиксированным размером заказа
2) система с фиксированной периодичностью заказа
3) саморегулирующиеся системы
4) управляющие системы
5) системы формирования заказа

Задание №30. В модели Уилсона для формирования оптимальной партии заказа учитывают

1) издержки хранения запасов
2) накладные расходы
3) издержки доставки и разгрузки заказа
4) издержки спроса

Задание №31. ____________ - один из видов экономико-математических моделей, представляющий собой прямоугольную таблицу, элементы которой отражают взаимосвязь экономических объектов и обладают определенным экономическим смыслом.

1) Матричная модель
2) Линейная модель
3) Динамическая модель
4) Табличная модель

Задание №32. ____________ - принятый в практике планирования метод взаимного сопоставления ресурсов - материальных, трудовых, финансовых - и потребностей в них

1) Матричный метод
2) Балансовый метод
3) Оптимизационный метод
4) Табличный метод

Задание №33. _______________ - это стоимость средств производства, произведенных i-й отрасли и потребленных в качестве материальных затрат в j-ой отрасли

1) Межотраслевой поток
2) Конечная продукция
3) Валовая продукция

Задание №34. Затраты вне сферы материального производства, т.е. для целей конечного потребления - это

1) Межотраслевой поток
2) Конечная продукция
3) Валовая продукция

Задание №35. Сколько квадрантов содержит балансовая модель?

1) 2
2) 4
3) 6
4) 8

Задание №36. _________________ показывает, сколько единиц продукции i-й отрасли непосредственно затрачивается в качестве средств производства на выпуск единицы продукции j-й отрасли

1) Коэффициент прямых затрат
2) Коэффициент полных затрат
3) Коэффициент переменных затрат
4) Коэффициент постоянных затрат

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 430 с.

2. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория : пер. с англ. / М. Интрилигатор. – М. : Айрис-пресс, 2002. – 564 с.

3. Лагоша, Б. А. Оптимальное управление в экономике : учеб. пособие / Б. А. Лагоша. – М. : Финансы и статистика, 2003 – 192 с.

4. Макаров, В. И. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / В.И. Макаров. – М.: КноРус, 2009 – 240 с.

5. Макаров, В. И. Экономико-математические методы и модели. Задачник : учеб. пособие / В.И. Макаров. – М.: КноРус, 2009 – 208 с.

6. Миненко С.Н. Экономико-математическое моделирование производственных систем / С.Н. Миненко. – М.: МГИУ, 2006

7. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование : практ. пособие по решению задач / И. В. Орлова. - М. : Вузовский учебник, 2005. – 142 с.

8. Розен, В. В. Математические модели принятия решений в экономике: учебное пособие / В. В. Розен. – М. : Книжный дом "Университет", 2002. – 287 с.

9. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии решения/ Авт. И.Л. Акулич, Е.И. Велесько, П. Ройш, В.Ф. Стрельченок. – Минск: БГЭУ, 2003.

10. Экономико-математические методы и прикладные модели/ под ред. В.В. Федосеева.- 2-е изд., перераб. и доп..- М.: ЮНИТИ, 2005 – 302 с.

11. Экономико-математическое моделирование : учеб. / под ред. И. Н. Дрогобыцкого. – М. : Экзамен, 2004. – 797 с.